Н. А. Рынинъ.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ.

(Методъ Монжа).



Г. Монжъ. (1746—1818).

ПЕТРОГРАДЪ.
1916.

Типографія А. Э. Коллинсъ, Мал. Дворянская, 19.

Предисловіе.

Методъ ортогональныхъ проекцій, впервые предложенный въ 1799 году французскимъ ученымъ Гаспаромъ Монжемъ [1]), почему и самый методъ часто называется *методомъ Монжа*, нашелъ себѣ широкое примѣненіе въ техникѣ.

Послѣ Монжа появился рядъ сочиненій по тому же предмету, причемъ самый методъ Монжа въ нихъ не подвергался измѣненію. Однако, нѣкоторыми авторами въ этихъ сочиненіяхъ были введены новыя условныя обозначенія и новые пріемы рѣшенія разныхъ задачъ, что облегчало изученіе упомянутаго метода.

Къ таковымъ сочиненіямъ можно отнести, напримѣръ, курсы: Адемара, Брисса, Гурнери, Оливіе и Пилле во Франціи, Вулея и Иглься въ Англіи, Бурместера, Гаука и Мюллера въ Германіи, Будаева, Курдюмова и Редера въ Россіи и многіе другіе.

Развитіе проективной геометріи послужило причиною установленію новаго взгляда на методъ ортогональныхъ проекцій, какъ на одну изъ частныхъ задачъ, рѣшаемыхъ въ проективной геометріи, и съ этой новой точки зрѣнія былъ составленъ еще рядъ курсовъ преслѣдующихъ тѣ-же задачи, что и ортогональныя проекціи, напримѣръ, Аскіеры, Лоріа и Энрикеса въ Италіи, Вильсона въ Америкѣ, Винера и Фидлера въ Германіи. Въ другомъ нашемъ сочиненіи [2])

---

[1]) „Géométrie descriptive". Leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la république: par Gaspard Monge, de l'Institut national. Paris, An. VII.

[2]) Н. А. Рынинъ. „Начертательная Геометрія. Методы изображенія". Петроградъ. 1916 г. Въ концѣ этого сочиненія приведенъ указатель литературы по Начертательной Геометріи.

мы подробно изложили упомянутую связь не только метода ортогональныхъ проекцій, но и другихъ методовъ изображенія съ проективной геометріей.

Въ настоящемъ же трудѣ, повторяя изложеніе метода Монжа съ послѣдовавшими болѣе удобными обозначеніями и упрощенными рѣшеніями различныхъ задачъ, мы поставили себѣ главною цѣлью приноровить его къ потребностямъ техниковъ, почему почти всѣ задачи, составленныя и рѣшенныя нами въ поясненіе различныхъ отдѣловъ курса, выбраны имѣющими исключительно прикладной, техническій характеръ. Всѣ такія задачи, а также нѣкоторыя приложенія ортогональныхъ проекцій къ рѣшенію задачъ на построеніе тѣней, на геометрическія мѣста, на триграннные углы и на кинематическія кривыя линіи отпечатаны мелкимъ шрифтомъ.

Кромѣ задачъ, рѣшенныхъ въ курсѣ, нами составленъ примѣнительно къ нему и изданъ въ отдѣльной книгѣ еще сборникъ задачъ, чтобы читатель имѣлъ матеріалъ для упражненія при изученіи различныхъ отдѣловъ курса [1]).

Въ заключеніе считаемъ долгомъ упомянуть, что въ обозначеніяхъ и въ бо́льшей части плана настоящаго труда намъ служилъ главнымъ примѣромъ прекрасный курсъ Начертательной Геометріи нашего учителя, покойнаго нынѣ, профессора Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I В. И. Курдюмова.

---

[1]) Н. А. Рынинъ, „Сборникъ задачъ для упражненій и заданій для эпюръ по Начертательной Геометріи". Петроградъ. 1916 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Часть II. Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей.

ВВЕДЕНІЕ.

«Чертежъ—языкъ техника».
Гаспаръ Монжъ.
«Начертательная Геометрія—
грамматика этого языка».
В. И. Курдюмовъ.

При составленіи проектовъ различнаго рода сооруженій приходится изображать послѣднія на бумагѣ и составлять такъ называемые *чертежи* этихъ сооруженій, т. е. изображенія сооруженій, выполненныя при помощи чертежныхъ инструментовъ въ извѣстномъ масштабѣ.

При помощи чертежей техникъ можетъ легко и быстро передать лицу, достаточно подготовленному къ чтенію ихъ, понятіе объ устройствѣ и назначеніи изображаемыхъ сооруженій. Кромѣ того, при помощи тѣхъ же чертежей представляется возможнымъ рѣшать различныя задачи, относящіяся къ проектируемому сооруженію, напримѣръ, опредѣлять длины отрѣзковъ прямыхъ линій, величины угловъ между линіями и плоскостями, линіи сѣченія между различными поверхностями и т. п.

Однако, для того, чтобы можно было пользоваться чертежомъ въ указанномъ направленіи, необходимо, чтобы онъ былъ составленъ по извѣстнымъ правиламъ, чтобы между изображеніемъ на чертежѣ и изображаемымъ предметомъ существовала опредѣленная геометрическая зависимость, и чтобы изображеніе опредѣляло бы одинъ опредѣленный предметъ, а не нѣсколько.

Существуетъ цѣлый рядъ методовъ, при помощи которыхъ можно удовлетворить упомянутымъ условіямъ, напримѣръ, перспектива, аксонометрія, проекціи съ числовыми отмѣтками, ортогональныя проекціи и т. д. Различіе между этими методами опредѣляется способомъ проектированія изображаемаго предмета на плоскости чертежа.

Упомянутые методы составляютъ содержаніе науки, называемой Начертательной Геометріей.

«*Начертательная Геометрія имѣетъ своимъ предметомъ изученіе методовъ изображенія формы существующихъ или воображаемыхъ предметовъ и рѣшеніе, при помощи этихъ изображеній, различныхъ геоме-*

трическихъ задачъ, главнымъ образомъ относящихся къ опредѣленію формы, положенія и размѣровъ предметовъ».

Отдѣлъ Начертательной Геометріи, называемый *методомъ ортогональныхъ проекцій*, является наиболѣе распространеннымъ среди техниковъ, такъ какъ при помощи него съ наибольшей простотой, быстротой и точностью строятся изображенія различнаго рода сооруженій, и рѣшаются задачи, относящіяся къ опредѣленію геометрическихъ элементовъ этихъ сооруженій. Правда, изображенія сооруженій, получаемыя въ этихъ проекціяхъ, не являются достаточно наглядными, такъ что для воспріятія въ умѣ и для мысленнаго возстановленія въ пространствѣ изображенныхъ предметовъ требуется нѣкоторый навыкъ и работа воображенія, однако, этотъ небольшой недостатокъ выкупается упомянутыми цѣнными свойствами этихъ изображеній.

Ниже излагается методъ ортогональныхъ проекцій.

Читатель, приступающій къ изученію этого метода, долженъ постоянно имѣть въ виду цѣль его изученія, именно: 1) научиться строить изображенія пространственныхъ предметовъ въ этихъ проекціяхъ. 2) быстро и точно рѣшать при помощи этого метода задачи по опредѣленію различнаго рода геометрическихъ элементовъ, относящихся къ изображаемымъ предметамъ. 3) быстро представлять себѣ формы пространственныхъ предметовъ по изображеніямъ ихъ въ этихъ проекціяхъ, составленныхъ другими лицами.

Всѣ эти три задачи рѣшаются при послѣдовательномъ изученіи курса и при постепенномъ развитіи воображенія, при чемъ нами настоятельно рекомендуется читателю непремѣнно продѣлывать самому на бумагѣ всѣ чертежи, помѣщенные въ курсѣ, при чемъ исполнять чертежи слѣдуетъ при помощи чертежныхъ принадлежностей: циркуля, треугольниковъ, линейки и т. д.

По мѣрѣ усложненія задачъ, на чертежѣ можетъ накапливаться много линій, соотвѣтствующихъ построеніямъ разнаго рода. Для большей легкости чтенія такихъ чертежей рекомендуется линіи, относящіяся къ разнымъ группамъ построеній, вычерчивать разными пунктирами или разными цвѣтами.

Кромѣ того, принято проекціи линій данныхъ видимыхъ, т. е. не закрываемыхъ отъ зрителя какими-нибудь непрозрачными плоскостями или тѣлами, вычерчивать тонкими сплошными черными линіями, проекціи же линій невидимыхъ вычерчивать такими же пунктирными линіями.

Геометрическіе элементы (линіи, углы), найденные по даннымъ условіямъ задачи, слѣдуетъ вычерчивать болѣе толстою черною или цвѣтной линіей: сплошною, если элементъ видимъ, и пунктирною, если онъ невидимъ.

Наконецъ, слѣдуетъ всегда имѣть въ виду, что рѣшеніе каждой за-

дачи должно состоять изъ двухъ главныхъ частей: 1) *рѣшенія ея въ пространствѣ*, при которомъ выясняется, какія въ пространствѣ слѣдуетъ провести линіи, плоскости или поверхности для опредѣленія искомаго геометрическаго элемента; 2) *рѣшенія ея въ проекціяхъ. Нельзя приступать къ рѣшенію задачи въ проекціяхъ, не составивъ себѣ яснаго плана рѣшенія ея въ пространствѣ*. Надо заранѣе знать, что слѣдуетъ чертить и къ какой цѣли стремиться при вычерчиваніи. Умѣстно здѣсь привести слова англійскаго военнаго инженера Георга Кларка, который, сравнивая между собою задачи математики и Начертательной Геометріи, говоритъ: [1]) «Рѣшеніе математическихъ задачъ можетъ быть достигнуто тѣмъ, что на военномъ языкѣ называется *способомъ систематическаго наступленія*, иными словами, рѣшенія ихъ можно вести постепенно, хотя бы послѣдующіе шаги, ведущіе къ нимъ, напередъ и не видны, но рѣшенія задачъ Начертательной Геометріи можно предвидѣть гораздо ранѣе, нежели ихъ можно точно опредѣлить. Вся цѣпь условій задачъ, равно какъ и каждый шагъ къ ихъ разрѣшенію могутъ быть одновременно охвачены воображеніемъ: *онѣ должны быть взяты штурмомъ*.

---

[1]) F. Wilson. «Descriptive Geometrie». New-Iork. 1898.

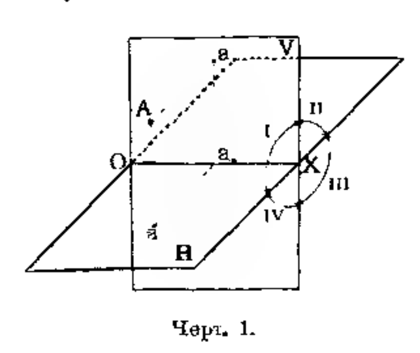
ЧАСТЬ I.

Ортогональныя проекціи точекъ прямыхъ линій, плоскостей и многогранниковъ.

§ 1. Общее понятіе о методѣ ортогональныхъ проекцій. Проекціи точки.

Методъ ортогональныхъ проекцій впервые систематически былъ изложенъ французскимъ ученымъ Гаспаромъ Монжемъ, почему этотъ методъ иногда называютъ *методомъ Монжа*.

Сущность этого метода заключается въ слѣдующемъ (черт. 1):



Черт. 1.

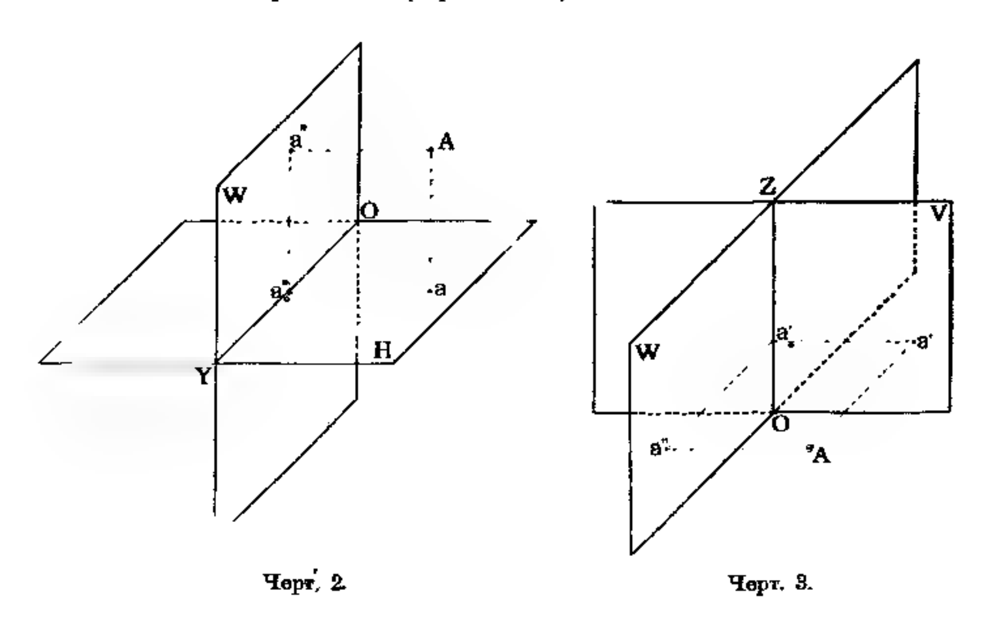
Пусть дана въ пространствѣ точка A и двѣ взаимно перпендикулярныхъ плоскости V и H.

Проведемъ изъ точки A двѣ линіи, изъ которыхъ одна пусть будетъ перпендикулярна къ H, а другая къ V, и отмѣтимъ точки a и a' пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ H и V. Каждая изъ этихъ точекъ называется *прямоугольной проекціей* точки A на соотвѣтстаенную плоскость. Совокупность же обѣихъ прямоугольныхъ проекцій a и a' точки A на двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ называется *ортогональными проекціями* точки A. Плоскости V и H называются *плоскостями проекцій.*

Одна изъ нихъ обыкиовенно выбирается горизонтально, обозначается буквой H и называется *горизонтальной плоскостью проекцій*, другая проводится вертикально и называется *вертикальной плоскостью проекцій.*

Если эта плоскость расположена перпендикулярно къ горизонтальному лучу зрѣнія, какъ на чертежѣ 1, то она иногда называется *фасадной плоскостью* и обозначаетсл буквою V.

Иногда одну изъ упомянутыхъ плоскостей V или H замѣняютъ плоскостью, одновременно перпендикулярной и къ V и къ H и называемой *второй вертикальной плоскостью проекцій* или *профильной плоскостью* и обозначаемой буквою W (черт. 2 и 3).



Черт. 2. Черт. 3.

Прямоугольная проекція a точки A на горизонтальную плоскость H называется *горизонтальной проекціей* точки A. Прямоугольная проекція a' точки A на вертикальную плоскость V называется *вертикальной проекціей* точки A. Наконецъ, прямоугольная проекція o'' точки A на профильную плоскость W называется *профильной проекціей* точки A.

Условимся въ дальнѣйшемъ точки въ пространствѣ обозначать большими буквами алфавита A, H, C, D и т. д., а ихъ проекціи—малыми буквами того же наименованія, при чемъ горизонтальныя проекціи будемъ обозначать малыми буквами безъ значковъ a, b, c, d и т. д., вертикальныя проекціи—малыми буквами съ однимъ значкомъ вверху справа a', b', c', d' и т. д., а профильныя проекціи—малыми буквами съ двумя значками вверху справа a'', b'', c'', d'' и т. д. При такихъ условіяхъ проекціи напримѣръ, точки A будутъ обозначены слѣдующимъ образомъ: a, a', a''.

Линіи пересѣченія плоскостей проекцій называются *осями проекцій* и обозначаются, какъ показано на чертежахъ 1 — 3, буквами OX, OY и OZ.

Линіи Aa' и Aa'', проектирующія точку A на плоскости V и W, называются *горизонтально проектирующими линіями*, а линія Aa, проектирующая ту же точку на H называется *вертикально проектирующей линіей*.

Каждая ось проекцій дѣлить двѣ изъ плоскостей проекцій на части, которыя называются *полами*.

Часть плоскости V, лежащая выше оси OX, называется *верхней полой* V, а лежащая ниже OX—*нижней полой* V.

Часть плоскости W, лежащая выше оси OY, называется *верхней полой* W, а лежащая ниже OY—*нижней полой* W.

Часть плоскости H, лежащая передъ осью OX, называется *передней полой* H, а лежащая сзади OX—*задней полой* H.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ преимущественно пользоваться ортогональными проекціями точекъ на плоскостяхъ H и V.

Выведемъ нѣсколько теоремъ, относящихся къ ортогональнымъ проекціямъ.

Теорема 1-я. Ортогональныя проекціи точки опредѣляютъ положеніе ея въ пространствѣ относительно плоскостей проекцій.

Обращаясь къ чертежу 1-му, замѣтимъ, что обѣ проектирующія линіи Aa и Aa', а также и точки a и a' лежать въ одной и той же плоскости. Поэтому, если даны плоскости проекцій V и H я на нихъ намѣчены ортогональныя проекціи a я a' какой то точки A въ пространствѣ, то, возстановляя изъ a перпендикуляръ aA къ H, а изъ a'—перпендикуляръ $a'A$ къ V, получимъ одну единственную точку A въ пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ.

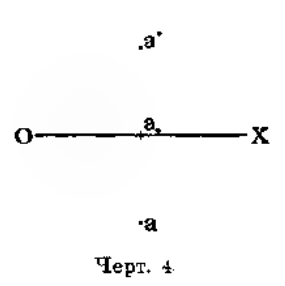
Плоскости V и H дѣлятъ все пространство на четыре угла: I-й—между верхней полой плоскости V и передней H, II-й—между верхней полой плоскости V и задней H; III-й—между нижней V и задней H и IV-й—между нижней V и передней H (черт. 1).

Для большаго удобства при геометрическихъ построеніяхъ плоскости H и V совмѣщаютъ другъ съ другомъ. Для этого вращаютъ плоскость V вокругъ оси OX до тѣхъ поръ, пока верхняя пола V не совпадетъ съ задней полой H, а нижняя пола V съ переднею H Такимъ образомъ, всѣ линіи, которыя были расположены въ 2-хъ плоскостяхъ: въ горизонтальной H и вертикальной V, послѣ такого совмѣщенія плоскостей будутъ лежать въ одной плоскости. Эту плоскость мы можемъ принять за плоскость чертежа.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что зритель находится въ предѣлахъ перваго угла пространства и можетъ видѣть только тѣ точки и линіи, которыя лежатъ въ предѣлахъ этого угла. Условимся проекціи

такихъ линій чертить сплошной чертою. Проекціи же линій невидимыхъ, т. е. лежащихъ во II, III и IV углахъ, будемъ чертить пунктиромъ.

Теорема 2-я. Горизонтальная и вертикальная проекціи одной и той же точки лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси проекцій. Доказательство: пусть намъ даны двѣ координатныя плоскости (черт. 1) H и V и проекціи точки A, лежащей въ I-мъ углу: вертикальная проекція a' и горизонтальная a. Такъ какъ линія Aa перпендикулярна къ плоскости H, а Aa' перпендикулярна къ плоскости V, то, очевидно, плоскость aAa' будетъ перпендикулярна къ оси проекцій OX. Слѣдовательно, линія aa_0 пересѣченія плоскости aAa' съ плоскостью H и линія $a'a_0$ пересѣченія той же плоскости съ плоскостью V будутъ перпендикулярны къ оси проекцій OX. Относительное положеніе линій и точекъ, лежащихъ на плоскости, не мѣняется отъ перемѣщенія этой плоскости. Такимъ образомъ, при совмѣщеніи V съ H вращеніемъ около OX, линіи aa_0 и $a'a_0$ останутся перпендикулярными къ OX. Линіи aa_0 и $a'a_0$ имѣютъ общую точку a_0, при совмѣщеніи плоскостей V и H будутъ лежать въ одной плоскости и, наконецъ, обѣ перпендикулярны къ OX. Очевидно, онѣ должны расположиться на одной прямой aa', перпендикулярной къ OX (черт. 4), что и требовалось доказать. Замѣтимъ, что $a'a_0 = Aa$ и $a_0a = Aa'$.



Черт. 4.

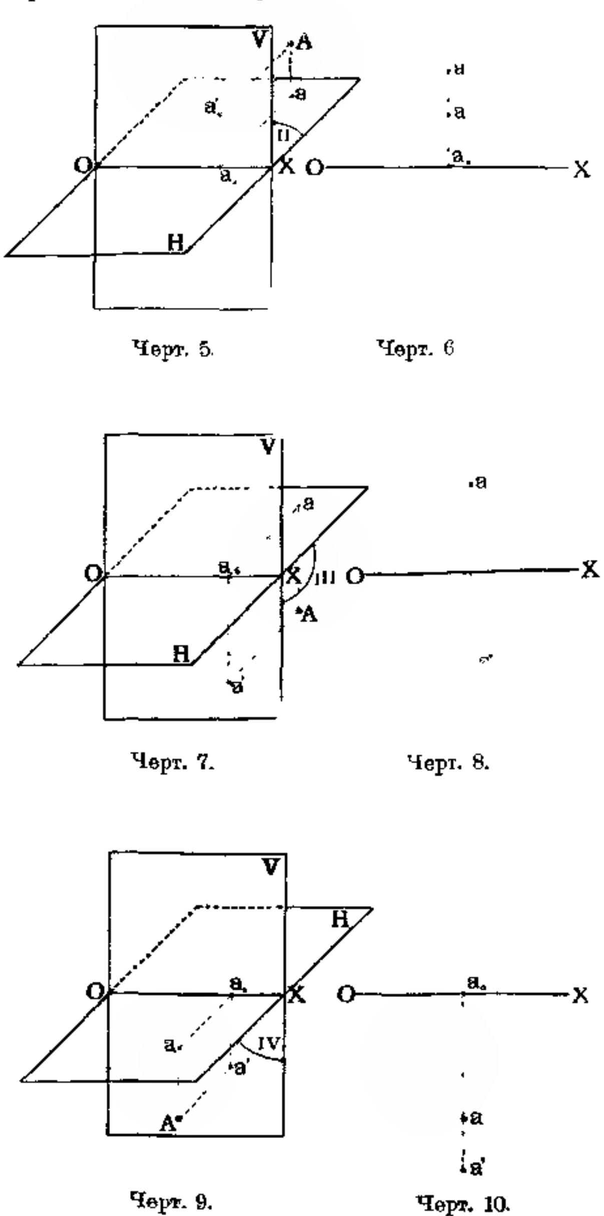
Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема 3-я. Разстоянія вертикальной и горизонтальной проекцій точки до оси соотвѣтственно опредѣляютъ разстоянія самой точки до горизонтальной и вертикальной плоскостей проекцій.

Сообразно съ тѣмъ, какъ будутъ расположены данныя точки—въ I, II, III, IV углахъ, будетъ мѣняться и расположеніе ихъ проекцій. Когда данная точка A расположена въ I-мъ углу, то, по совмѣщеніи плоскостей, ея вертикальная проекція будетъ лежать надъ осью OX, а горизонтальная подъ осью OX (черт. 1 и 4). Когда точка A—во II-мъ углу (черт. 5 и 6), то ея вертикальная проекція будетъ расположена на верхней полѣ V, а горизонтальная на задней полѣ плоскости H, и при совмѣщеніи V съ H вертикальная и горизонтальная проекціи будутъ лежать надъ осью OX.

Когда точка A лежитъ въ III-мъ углу, то ея вертикальная проекція будетъ расположена на нижней полѣ V, а горизонтальная—на задней полѣ H. При совмѣщеніи же плоскостей H и V ея горизонтальная проекція займетъ мѣсто выше оси OX, а вертикальная ниже OX (чертежи 7 и 8). Наконецъ, когда точка A лежитъ въ IV-мъ углу, ея вер-

тикальная проекція будетъ расположена на нижней полѣ V, а горизонтальная на передней полѣ H. При совмѣщеніи же плоскостей H в V



Черт. 5. Черт. 6

Черт. 7. Черт. 8.

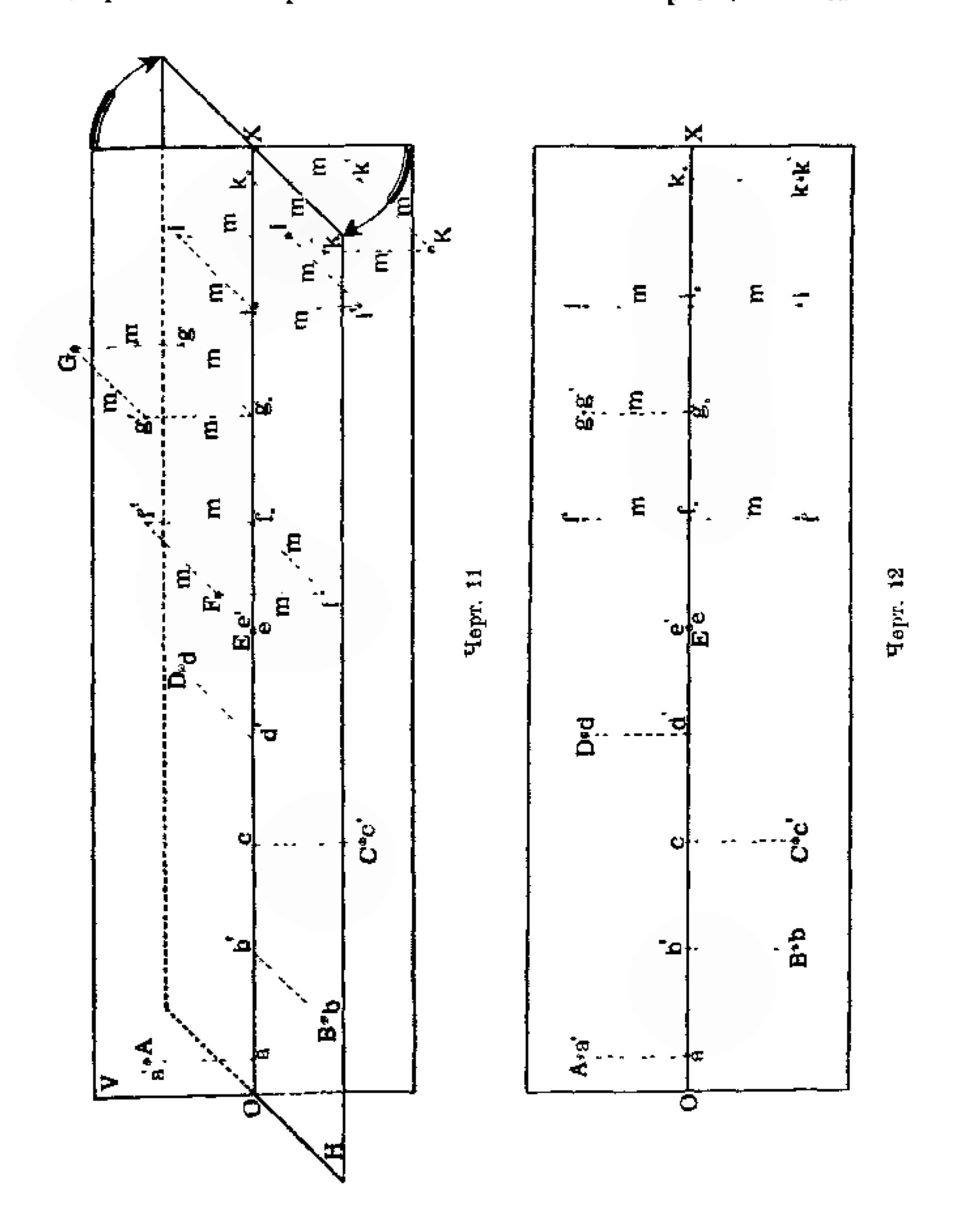
Черт. 9. Черт. 10.

вертикальная и горизонтальная проекціи будутъ лежать ниже оси OX (черт. 9 и 10).

Если точка будетъ занимать какое-нибудь особенное положеніе отно-

тельно плоскостей проекцій, то это сейчасъ же отразится на расположеніи ея проекцій.

На черт. 11 и 12 показаны такіе особенные случаи расположенія точекъ, при чемъ на чертежѣ 11 точки и плоскости проекцій показаны въ



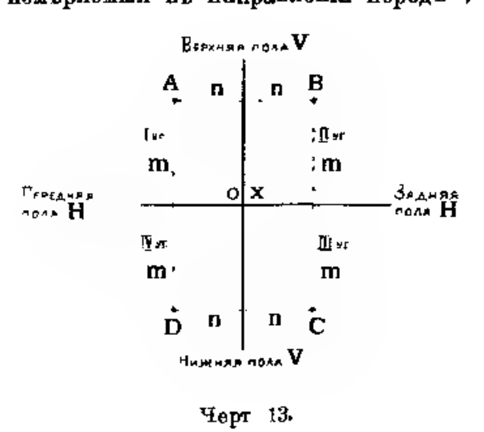
Черт. 11

Черт. 12

пространствѣ, а на черт. 12 плоскости уже совмѣщены другъ съ другомъ, и точки обозначены ихъ проекціями.

Точка	*A*	лежитъ	на верхней	полѣ *V*.				
»	*B*	»	» передней	» *H*,				
»	*C*	»	» нижней	» *V*,				
»	*D*	»	» задней	» *H*,				
»	*E*	»	» оси *OX*.					
»	*F*	»	въ I	углу	на равныхъ	разстояніяхъ	отъ *V* в *H*,	
»	*G*	»	въ II	»	»	»	»	
»	*I*	»	въ III	»	»	»	»	
»	*K*	»	въ IV	»	»	»	»	

Условимся въ дальнѣйшемъ разстоянія точки отъ плоскостей проекцій, измѣряемыя въ направленіи передъ *V* или надъ *B* считать положительными, а въ противоположныхъ направленіяхъ — отрицательными. Разстоянія эти будемъ называть *координатами* точки.



Черт 13.

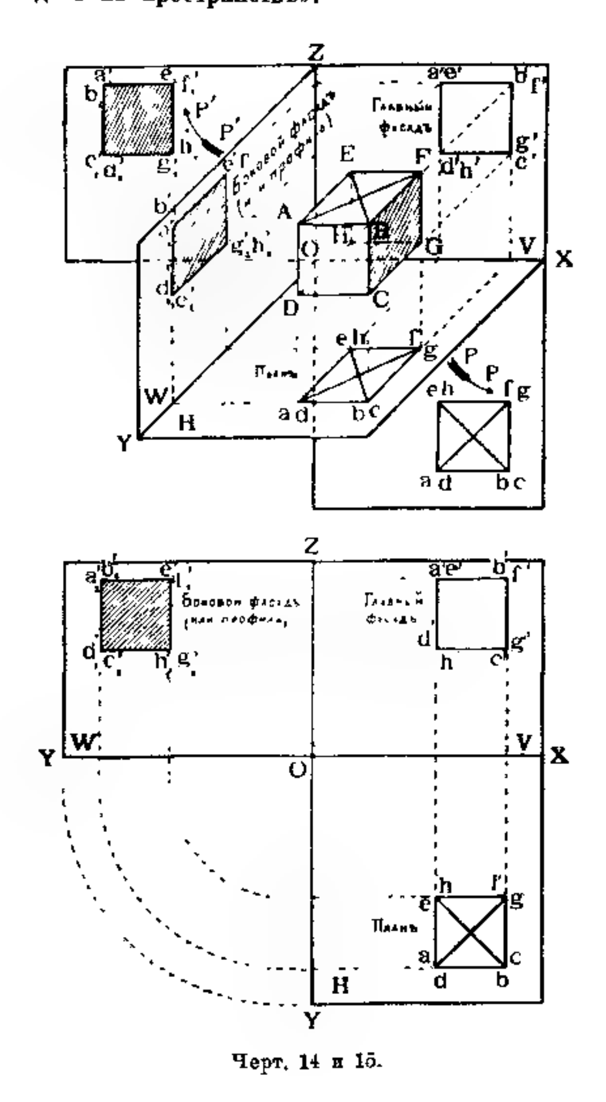
Если координата положительная, то будемъ ставить передъ ея обозначеніемъ знакъ + или не будемъ ставить никакого знака, если же она отрицательная, то будемъ ставить знакъ .

При такомъ условіи будемъ имѣть слѣдующіе знаки координатъ точекъ, расположенныхъ въ разныхъ углахъ пространства и изображенныхъ на черт. 13, при чемъ на этомъ чертежѣ точки изображены въ проекціи на профильную плоскость:

Точка	*A* — въ	I	углу;	координаты	$+m$ и $+n$
»	*B* — въ	II	»	»	$+m$ и $-n$
»	*C* въ	III	»	»	$-m$ и $-n$
»	*D* — въ	IV	»	»	$-m$ и $+n$.

Въ дальнѣйшемъ рекомендуется читателю постепенно отвыкать пользоваться изображеніями подобными 1, 2, 3, 5, 7, 9 и 11 пространственнаго расположенія точекъ и плоскостей проекцій, а стараться изображать точки ихъ проекціями, предполагая плоскости совмѣщенными другъ съ другомъ, составляя чертежи подобные №№ 4, 6, 8, 10 и 12, представляя при этомъ себѣ въ умѣ пространственное расположеніе точекъ и плоскостей. При такомъ способѣ изученія предмета у читателя постепенно разовьется способность представлять и запоминать въ умѣ все

болѣе и болѣе сложныя сочетанія геометрическихъ формъ, разовьется воображеніе и онъ овладѣетъ весьма цѣнной для инженеровъ способностью, «мысленно видѣть въ пространствѣ».



Черт. 14 и 15.

Часто проекцію на V какого-нибудь предмета называютъ его главнымъ *фасадомъ*, проекцію предмета на H называютъ его *планомъ*, а проекцію предмета на W называютъ его *боковымъ* фасадомъ.

Если разрѣзать какой-нибудь предметъ плоскостью, параллельной плоскости W, и спроектировать полученную фигуру на W, то такая проекціа называется *профилемъ* предмета относительно плоскости W.

Часто планомъ предмета называютъ проекцію на H фигуры, получаемой при сѣченіи предмета плоскостью, параллельной H.

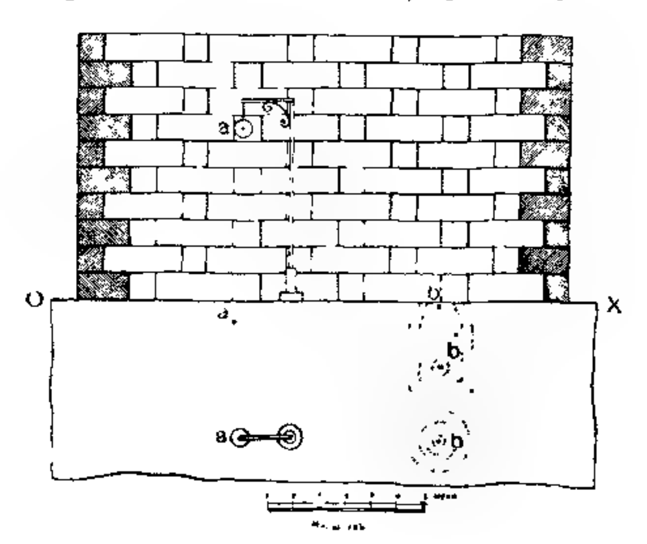
На черт. 14 показаны проекціи восьми точекъ, образующихъ вершины кубика $ABC..GH$. Проекція кубика на V даетъ главный фасадъ его, на H — планъ и на W — боковой фасадъ или профиль по плоскости $BFGC$.

Если разрѣзать плоскости H и W по линіи OY, совмѣстить H съ V, вращая H по стрѣлкѣ pp вокругъ оси OX, и совмѣстить W съ V, вращая W по стрѣлкѣ $p'p'$ вокругъ оси OZ, то получится фигура, изображенная на черт. 15.

Чертежъ, подобный чертежамъ 12 или 15, на которомъ показаны проекціи фигуры при совмѣщеніи H съ V или W съ V, называется *эпюрой* (отъ французскаго слова épurer—улучшить, épure—буквально улучшенное изображеніе, чертежъ).

Условимся въ дальнѣйшемъ подъ словами «найти или опредѣлить точку» понимать выраженіе: найти или опредѣлить проекціи точки.

Задача 1. На чертежѣ 16 въ ортогональныхъ проекціяхъ изображены: каменная стѣна, фасадъ которой совпадаетъ съ плоскостью V, дорога, поверхность которой сов-



Черт. 16.

падаетъ съ плоскостью H. На дорогѣ стоитъ столбъ съ электрическимъ фонаремъ, подъ дорогой имѣется колодезь съ пожарнымъ водопроводнымъ краномъ.

Требуется опредѣлить 1) разстоянія (въ метрахъ) центра A фонаря отъ стѣны и отъ мостовой, 2) разстояніе центра B крана отъ стѣны и отъ мостовой.

Рѣшеніе. Измѣряемъ циркулемъ разстоянія точекъ a', a, b, b' до оси OX и, пользуясь масштабомъ, получаемъ:

Разстояніе	A до стѣны	равно	$a\,a_0$ —	5 метр.
„	A до мостовой	„	$a'a_1$ — $6^1/_2$	„
„	B до стѣны	„	$b\,b_0$ — 5	„
„	B до мостовой	„	$-b'b_0$ — $2^1/_2$	„

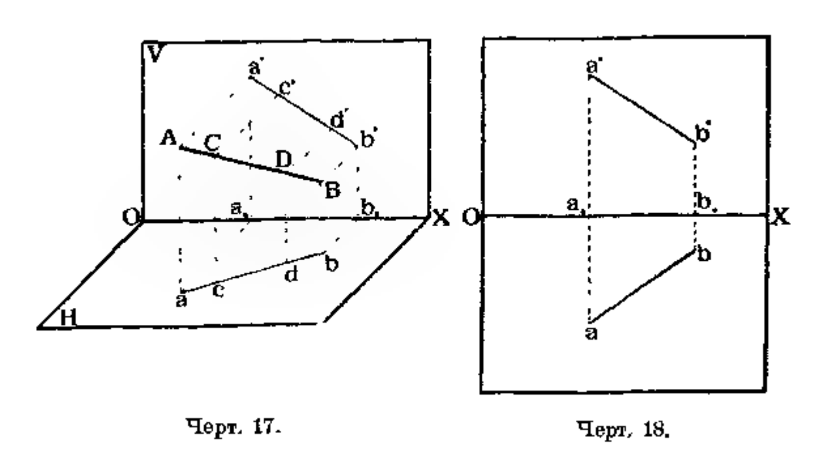
Знакъ минусъ передъ ординатой $b'b_0$ показываетъ, что точка B находится подъ мостовой

§ 2. Прямая линія.

а) *Заданіе прямой линіи.*

Положеніе прямой линіи въ пространствѣ опредѣляется положеніемъ двухъ ея точекъ. Поэтому для заданія прямой линіи въ ортогональныхъ проекціяхъ достаточно имѣть проекціи какихъ-нибудь двухъ точекъ этой прямой, напримѣръ, концовъ отрѣзка ея.

Пусть, напримѣръ, (черт. 17) данъ въ пространствѣ отрѣзокъ AB прямой линіи. Спроектируемъ концы его A и B на плоскости V и H; тогда



Черт. 17. Черт. 18.

получимъ проекціи этихъ точекъ: горизонтальныя a и b и вертикальныя a' и b'. Возьмемъ на прямой AB еще нѣсколько точекъ, напримѣръ, C и B и спроектируемъ ихъ на плоскость H. Линіи, проектирующія эти точки, будутъ параллельны линіямъ Aa и Bb и будутъ лежать въ одной и той же вертикальной плоскости $AaBb$, которая называется ***плоскостью, вертикально проектирующей линію*** AB. Эта плоскость пересѣчетъ плоскость H по линіи ab, которая и называется ***горизонтальной проекціей линіи*** AB. На линіи ab расположатся, очевидно, горизонтальныя проекціи c, d всѣхъ точекъ C, D самой прямой AB.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, получимъ, что линія $a'b'$, соединяющая вертикальныя проекціи точекъ A и B, будетъ служить ***вертикальной проекціей линіи*** AB и опредѣлится, какъ линія сѣченія пло-

скости V съ плоскостью $Aa'Bb'$, называемой *плоскостью, горизонтально-проектирующей линію AB.*

На черт. 18 показаны проекціи линіи AB при совмѣщеніи V съ B, при чемъ, согласно теоремѣ 2 й, точки a' и a, равно какъ и точки b' и b, попарно будутъ лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX.

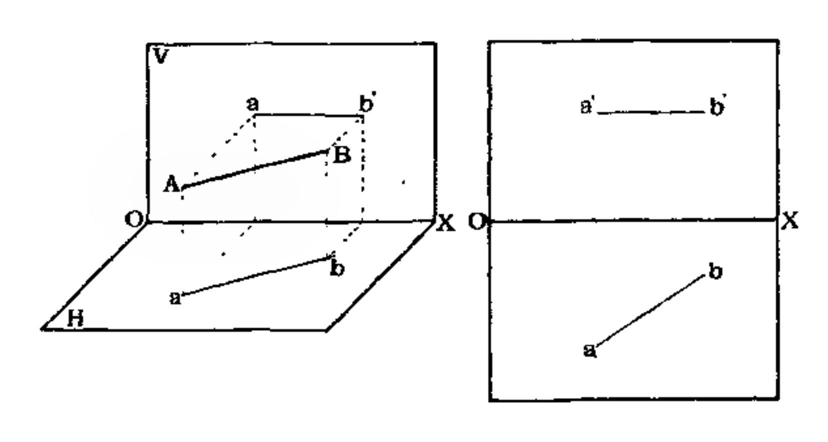
ъ). *Проекціи прямой линіи при разныхъ положеніяхъ ея относительно V и H.*

Разсмотримъ, какъ отражаются различныя положенія прямой на положеніи и видѣ ея ортогональныхъ проекцій.

На чертежахъ 17 и 18 прямая была задана случайнымъ образомъ.

Если прямая AB параллельна H (черт. 19), то плоскость, горизонтально проектирующая ее на V, будетъ также параллельна H и пересѣчетъ V по линіи $a'b'$, которая будетъ служить вертикальной проекціей AB и будетъ параллельна оси OX. Кромѣ того, горизонтальная проекція ab будетъ равна и параллельна отрѣзку AB прямой. Въ этомъ случаѣ, какъ говорятъ, прямая AB проектируется на H *безъ искаженія*.

Кромѣ того, разстояніе вертикальной проекціи $a'b'$ до оси OX равно разстоянію самой прямой AB до плоскости H. На черт. 20 показаны проекціи такой прямой при совмѣщеніи V съ H.

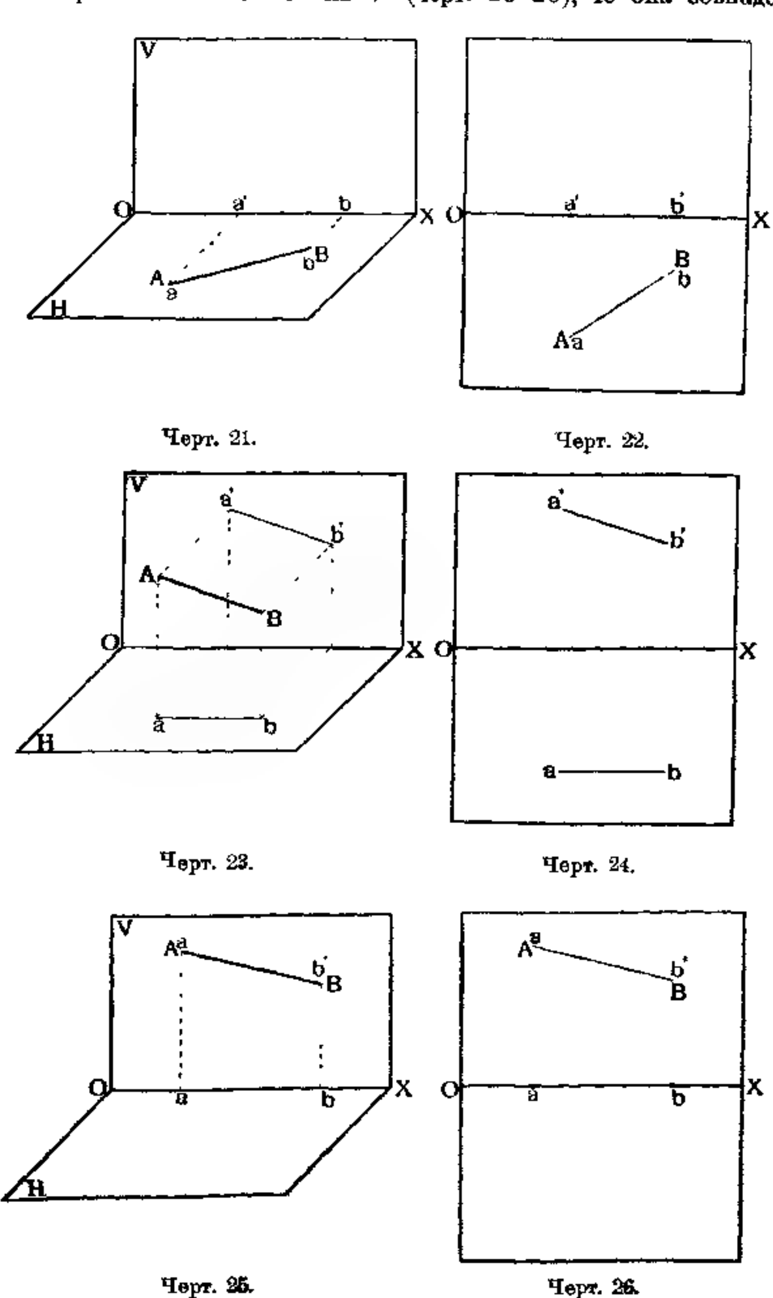


Черт. 19. Черт. 20.

Если прямая AB лежитъ въ H (черт. 21 и 22), то она совпадетъ съ своей горизонтальною проекціей ab, вертикальная же проекція ея $a'b'$ совпадетъ съ осью.

Если прямая AB параллельна V (черт. 23 и 24), то она на V спроектируется безъ искаженія; горизонтальная же проекція будетъ параллельна OX. Разстояніе горизонтальной проекціи ab до оси OX равно разстоянію самой прямой AB до V.

Если прямая AB лежитъ на V (черт. 25 26), то она совпадетъ со



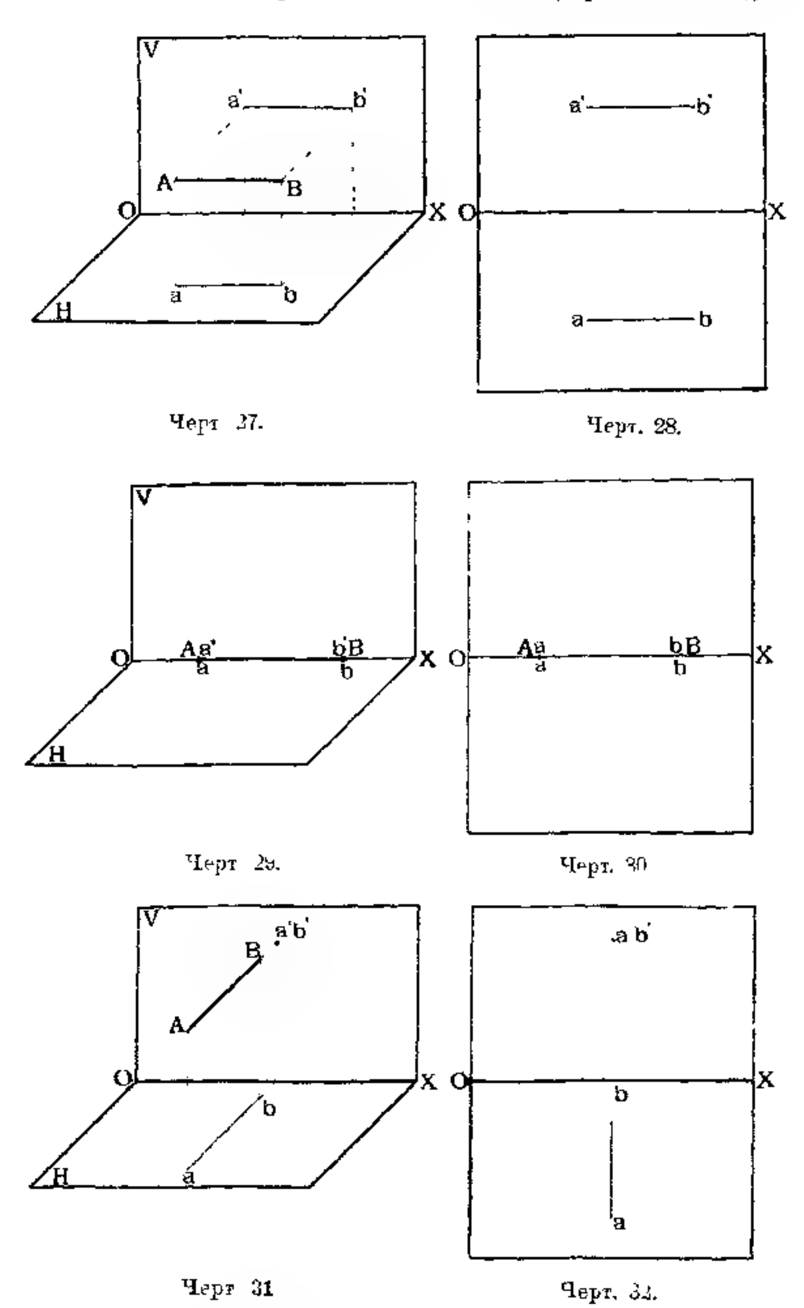
Черт. 21. Черт. 22.

Черт. 23. Черт. 24.

Черт. 25. Черт. 26.

своей вертикальной проекціей $a'b'$, горизонтальная же ея проекція ab совпадетъ съ осью OX.

Если прямая *AB* параллельна оси *OX* (черт. 27 и 28), то она



Черт. 27.

Черт. 28.

Черт. 29.

Черт. 30.

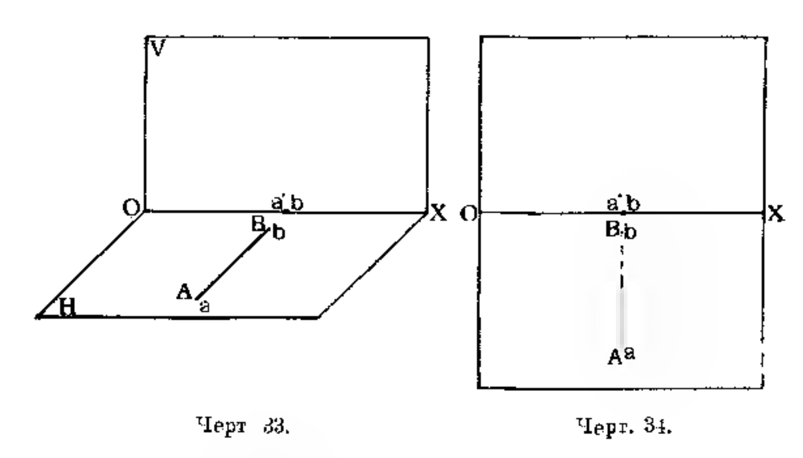
Черт. 31.

Черт. 32.

спроектируется безъ искаженія на *V* и на *H*, и обѣ ея проекціи будутъ параллельны *OX*.

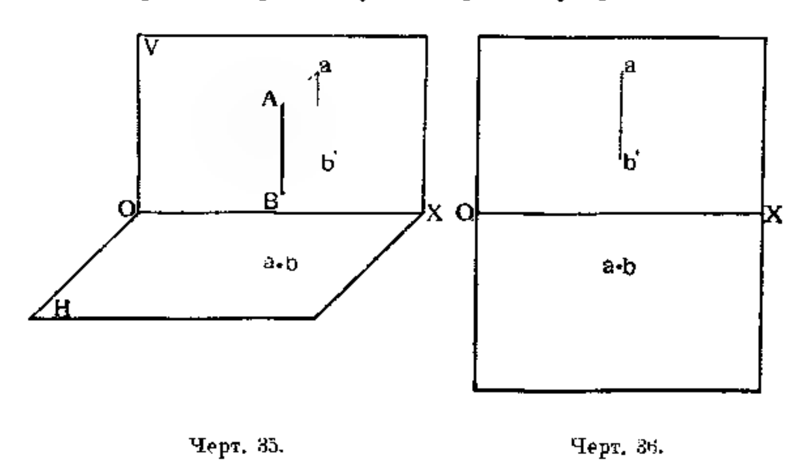
Если прямая AB совпадаетъ съ осью OX (черт. 29 и 30), то она совпадетъ и съ обѣими своими проекціями, сливающимися съ OX.

Если прямая AB перпендикулярна къ V (черт. 31 и 32), то она спроектируется на V въ видѣ точки, или, какъ иногда говорятъ, она



Черт. 33. Черт. 34.

исчезаетъ въ своей проекціи на V. Для опредѣленности заданія необходимо эту точку обозначить двумя буквами $a'b'$, показывающими, что въ этой точкѣ сливаются по крайней мѣрѣ двѣ точки A и B прямой. Горизонтальная проекнія прямой будетъ перпендикулярна къ оси OX.



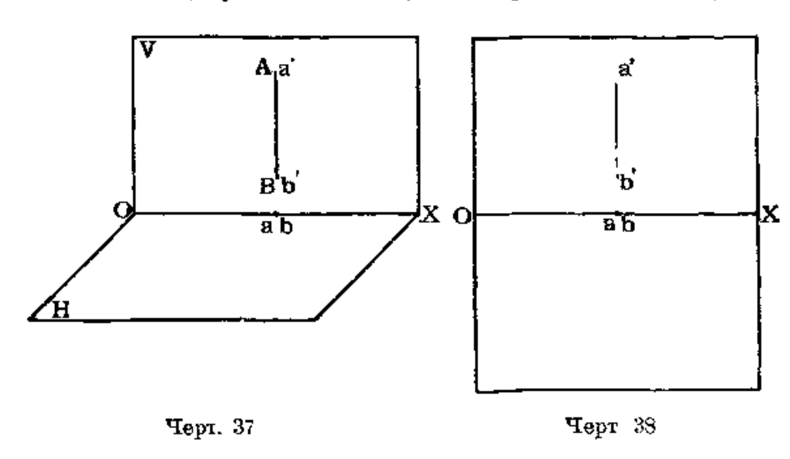
Черт. 35. Черт. 36.

Если прямая AB лежитъ въ H и перпендикулярна къ V (черт. 33 и 34), то вертикальная проекція ея $a'b'$ будетъ въ видѣ точки и расположится на оси OX, горизонтальная же проекція ab будетъ перпендикулярна къ оси OX и совпадетъ съ самой прямой AB.

Если прямая AB перпендикулярна къ H (черт. 35 и 36), то она

исчезаетъ въ своей горизонтальной проекціи, проектируясь на H въ видѣ точки ab, вертикальная же проекція $a'b'$ будетъ перпендикулярна къ OX.

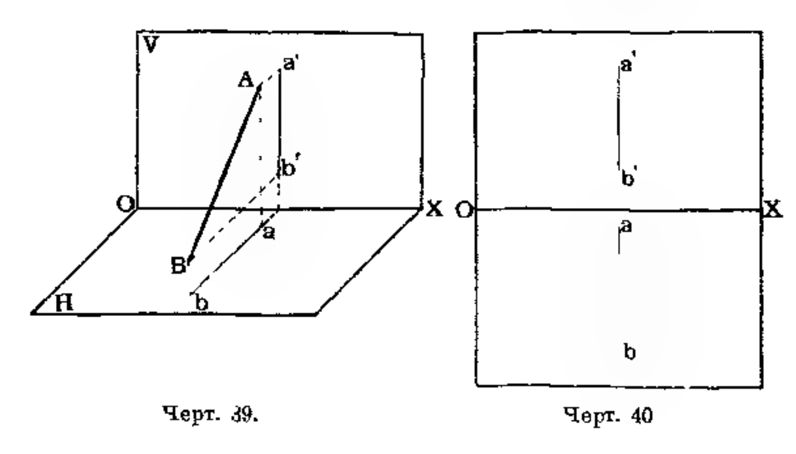
Если прямая AB, оставаясь перпендикулярной къ H, будетъ лежать въ плоскости V (черт. 37 и 38), то горизонтальная проекція ея,



Черт. 37 Черт 38

обращаясь въ точку ab, расположится на оси OX; вертикальная же проекція $a'b'$ будетъ попрежнему перпендикулярна къ OX.

Если прямая AB лежитъ въ профильной плоскости, т. е. въ плоскости, перпендикулярной къ оси OX (черт. 39 и 40), то она называется



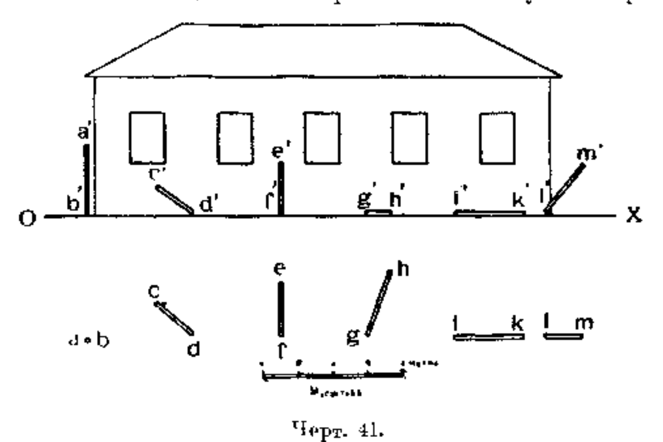
Черт. 39. Черт. 40

профильной линіей, и ея проекціи ab и $a'b'$ расположатся по линіямъ сѣченія профильной плоскости съ V и H. При совмѣщеніи V съ H обѣ проекціи расположатся на одной прямой линій, перпендикулярной къ оси OX.

Условимся въ дальнѣйшемъ подъ словами: «найти или опредѣлить прямую линію» понимать «найти или опредѣлить проекціи прямой линіи».

Задача 2. На чертежѣ 41 изображены въ ортогональныхъ проекціяхъ: домъ, фасадъ котораго совпадаетъ съ плоскостью V, и столбы разрушеннаго забора. Принимая поверхность земли совпадающей съ H, опредѣлить: 1) положеніе столбовъ забора относительно земли и стѣны дома, 2) длину (въ метр.) столбовъ, предполагая, что они всѣ одинаковые и 3) разстоянія концовъ столбовъ отъ стѣны и отъ земли.

Рѣшеніе: Столбъ AB стоитъ вертикально, и длина его, проектируясь на V безъ искаженія, равна $a'b'$ или по масштабу 2 метра. Разстояніе концовъ его отъ стѣны равно разстоянію точки ab до оси OX и равно по масштабу $1^1/_2$ метрамъ.



Черт. 41.

Столбъ CD наклоненъ къ стѣнѣ влѣво. Разстояніе конца его C отъ стѣны равно $2^1/_2$ метра, а отъ земли $^3/_4$ метра.

Столбъ EF наклоненъ концомъ E къ стѣнѣ и располагается въ профильной плоскости. Разстояніе конца его E отъ V равно 2 метрамъ и отъ H—$1^1/_2$ метрамъ.

Столбъ GH лежитъ на землѣ. Разстояніе конца его H отъ стѣны равно $1^1/_2$ метр., конца G отъ стѣны—$3^1/_2$ метрамъ.

Столбъ IK лежитъ на землѣ параллельно стѣнѣ въ разстояніи отъ нея $3^1/_2$ метр.

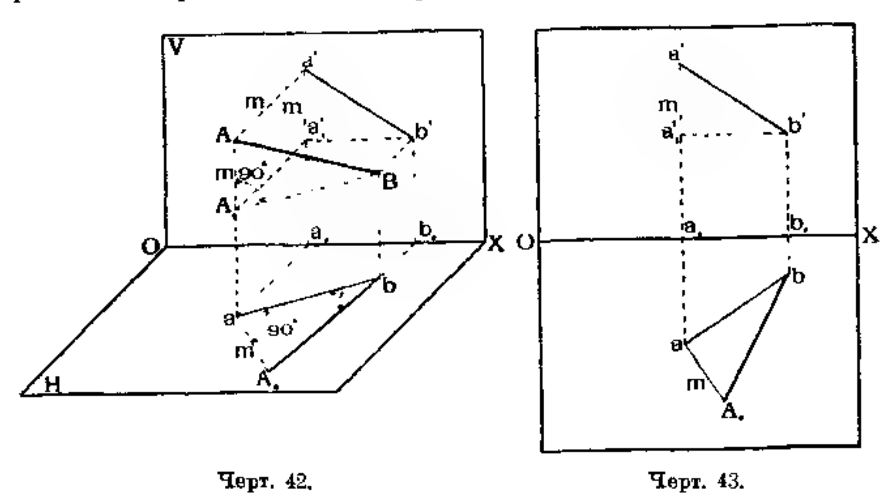
Столбъ LM расположенъ параллельно стѣнѣ и наклоненъ къ землѣ. Разстояніе конца его M отъ стѣны равно $3^1/_2$ метрамъ, а отъ земли $1^1/_2$ метрамъ.

c) *Опредѣленіе длины отрѣзка прямой линіи и угловъ наклона ея къ V и H.*

Пусть данъ въ пространствѣ отрѣзокъ AB прямой линіи (черт. 42). Построимъ его проекціи ab и $a'b'$.

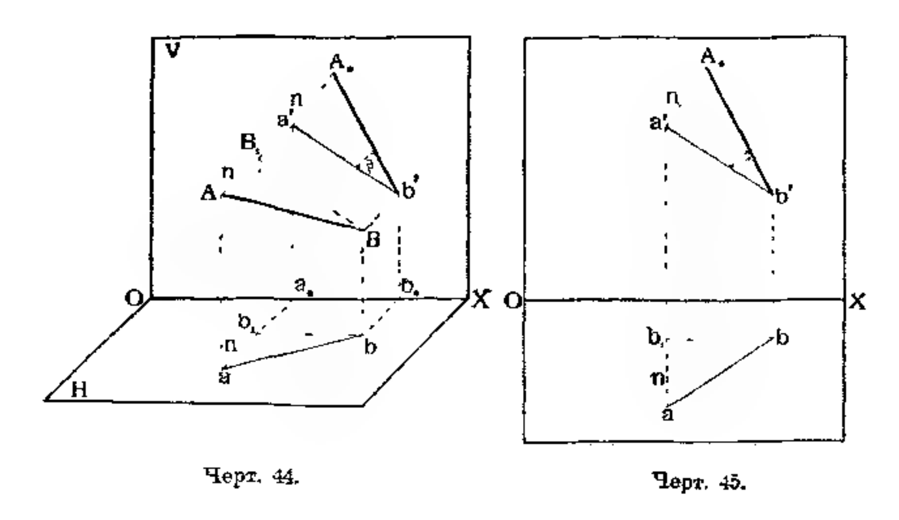
Проведемъ черезъ точку B прямую BA_1, параллельную ab, до пересѣченія съ линіей Aa въ точкѣ A_1; изъ точки b' проведемъ прямую $b'a_1'$, параллельную OX, до пересѣченія въ точкѣ a_1' съ $a'a_0$, перпендикулярной къ OX. Зная, что $ab = A_1B$ и разность высотъ $Aa - Bb = AA_1 = a'a_1'$, мы легко можемъ построить на ab въ плоскости H такой прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго A_0b выразитъ величину отрѣзка AB. Одинъ катетъ ab данъ, другой катетъ $A_0a = a'a_1'$, т. е. выражаетъ разность высотъ концовъ вертикальной проекціи отрѣзка надъ осью OX. На черт. 43 всѣ эти построенія исполнены въ проекціяхъ. Итакъ, длина

отрѣзка AB въ пространствѣ опредѣляется, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, одинъ изъ катетовъ котораго равенъ длинѣ горизонтальной проекціи отрѣзка, а другой — разности m разстояній концовъ вертикальной проекціи того же отрѣзка отъ оси OX.



Черт. 42. Черт. 43.

Ту же величину отрѣзка AB можно опредѣлить и инымъ способомъ (черт. 44). Проведемъ изъ точки B линію, параллельную $a'b'$, до встрѣчи



Черт. 44. Черт. 45.

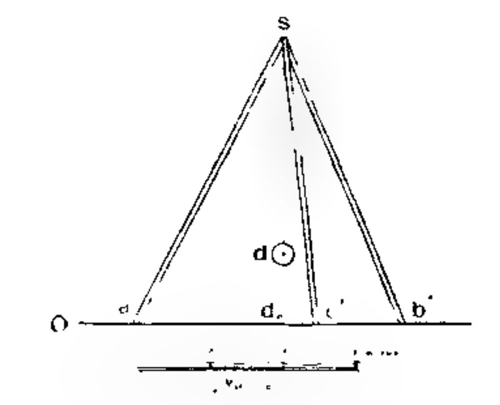
съ Aa' въ точкѣ B_1. Получаемъ прямоугольный треугольникъ съ прямымъ угломъ при B_1. Два катета этого треугольника извѣстны: одинъ катетъ $BB_1 = a'b'$, другой равенъ разности разстояній концовъ прямой AB до плоскости V или концовъ ab до оси OX. Поэтому величина

отрѣзка прямой AB въ пространствѣ опредѣляется, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ котораго является величина вертикальной проекціи, а другимъ—разность разстояній концовъ горизонтальной проекціи отъ оси. Для опредѣленія AB во второмъ случаѣ достаточно построить въ плоскости V на $a'b'$ прямоугольный треугольникъ, одинъ катетъ котораго $a'b'$ (черт. 45), а другой равенъ разности n разстояній концовъ горизонтальной проекціи отъ оси OX; гипетенуза A_1b' и будетъ выражать истинную длину отрѣзка AB.

Комбинируя эти два случая, получаемъ слѣдующую теорему.

Теорема 4. Величина отрѣзка прямой линіи въ пространствѣ выражается гипотенузой прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ котораго служитъ одна изъ проекцій даннаго отрѣзка, а другимъ—разность разстояній концовъ другой его проекціи до оси OX.

Разсматривая прямоугольный Δ-къ AA_1B (черт. 42), нетрудно замѣтить, что уголъ α между линіями AB и A_1B выражаетъ уголъ наклона прямой AB къ плоскости H и онъ опредѣляется, такъ сказать, попутно, на черт. 43, при нахожденіи длины отрѣзка AB ($\angle abA_0 = \angle ABA_1$). Подобнымъ же образомъ изъ чертежа 45 опредѣляется и уголъ β наклона прямой AB къ плоскости V, такъ какъ $\triangle A_0b'a'$ равенъ $\triangle$-ку ABB_1 (черт. 44), въ которомъ уголъ β между линіями AB и B_1B выражаетъ уголъ наклона AB къ V.



Задача № 3.

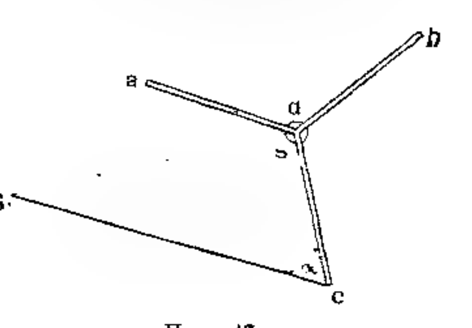
На черт 46 дано въ ортогональныхъ проекціяхъ изображеніе деревянной треноги $ABCS$, къ верхнему узлу которой S подвѣшенъ на цѣпи SL грузъ D. Опредѣлить.

1) Длины ногъ AS, BS и CS треноги.

2) Углы ихъ наклона къ землѣ H.

3) Длину цѣпи SD.

Рѣшеніе Разсматривая горизонтальную проекцію треноги, видимъ, что длины $as = bs = cs$ Изъ вертикальной же проекціи треноги видно, что разность растояній Sd_0 конца S всѣхъ треногъ надъ ихъ основаніями одна и та же. Поэтому заключаемъ, что и длины всѣхъ трехъ ногъ треноги и углы наклона ихъ къ землѣ будутъ одинаковыми, и достаточно опредѣлить длину и уголъ наклона къ землѣ одной изъ нихъ, напримѣръ, SC.

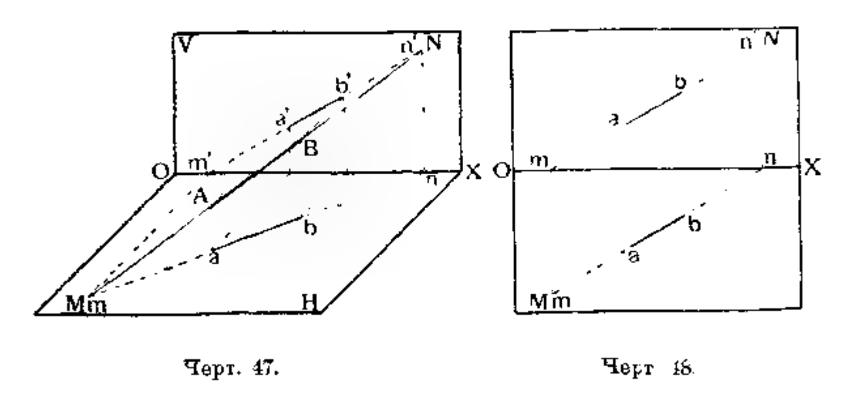


Черт. 46.

На основаніи теоремы 4-й строимъ прямоугольный треугольникъ cdS_1, однимъ катетомъ котораго принимаемъ dc, а другимъ $dS_1 = d_1s'$. Длина гипотенузы S_1c равная по масштабу 4,1 метра, и будетъ равна длинѣ каждой ноги треноги, а уголъ $\alpha = 60°$ между S_1c и dc равенъ углу наклона ногъ къ землѣ. Длина цѣпи SD, которая виситъ вертикально, и, слѣдовательно, проектируется на V безъ искаженія, измѣряется длиною отрѣзка $s'd'$ и равна по масштабу 3 метр.

d) *Опредѣленіе слѣдовъ прямой линіи.*

Слѣдами прямой линіи называются точки пересѣченія ея съ плоскостями проекцій. Въ общемъ случаѣ прямая линія имѣетъ два слѣда: ***горизонтальный*** M (черт. 47), т. е. точку пересѣченія ея съ плоскостью H, и ***вертикальный*** N, точку пересѣченія ея съ плоскостью V. Разсматривая чертежъ 47, нетрудно видѣть, что точка M, совпадая со своей



Черт. 47. Черт. 48.

горизонтальной проекціей, будетъ имѣть вертикальную проекцію m' на оси; но въ то же время m' должно находиться и на продолженіи линіи $a'b'$, такъ какъ сама точка M лежитъ на продолженіи AB.

Подобнымъ же образомъ вертикальный слѣдъ N совпадетъ со своей вертикальной проекціей n', горизонтальная же проекція его n будетъ лежать на оси въ точкѣ пересѣченія послѣдней съ горизонтальной проекціей ab прямой.

Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему для опредѣленія слѣдовъ прямой линіи, заданной въ ортогональныхъ проекціяхъ:

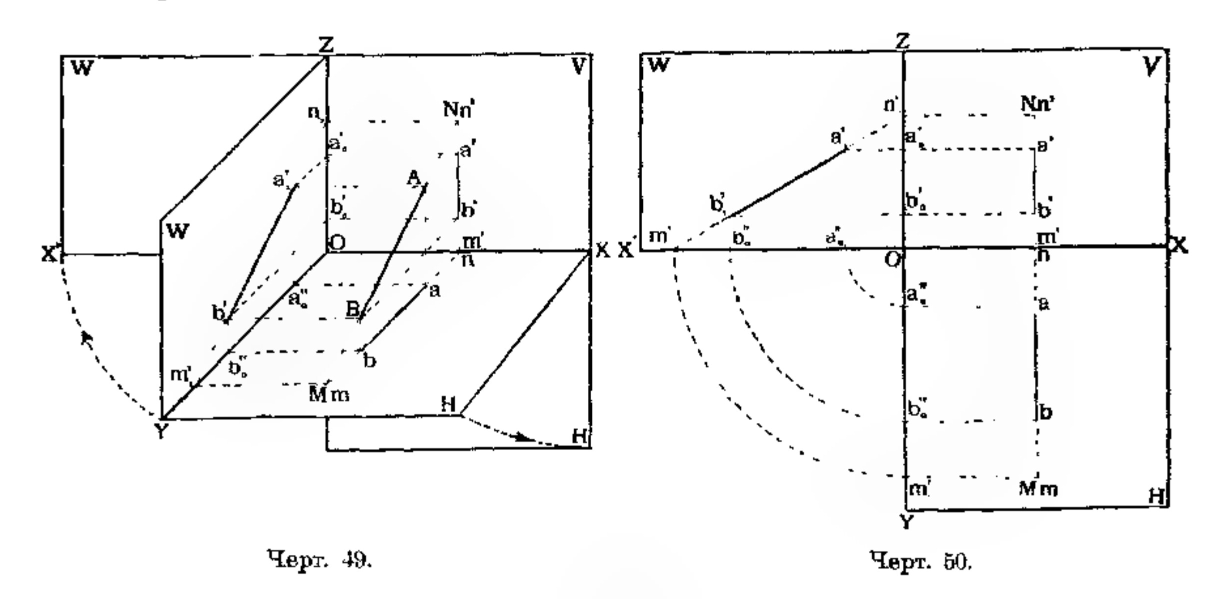
Теорема 5. Для нахожденія горизонтальнаго слѣда прямой линіи достаточно продолжить вертикальную проекцію прямой до пересѣченія съ осью, въ полученной точкѣ возстановить въ плоскости H перпендикуляръ къ OX и продолжить его до пересѣченія съ горизонтальной проекціей прямой въ точкѣ, которая и будетъ искомымъ слѣдомъ.

Для нахожденія вертикальнаго слѣда достаточно продолжить горизонтальную проекцію прямой до пересѣченія съ осью, въ полученной

точкѣ возстановить въ плоскости V перпендикуляръ къ OX и продолжить его до пересѣченія съ вертикальной проекціей прямой въ точкѣ, которая и будетъ искомымъ слѣдомъ.

На чертежѣ 48 всѣ эти построенія исполнены въ ортогональныхъ проекціяхъ.

Слѣды *профильной* линіи на основаніи этого правила найти нельзя, такъ какъ перпендикуляры къ оси, на которыхъ лежатъ искомые слѣды, не будутъ пересѣкаться съ соотвѣтствующими проекціями прямой, а сольются съ ними. Для опредѣленія же слѣдовъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ:



Черт. 49. Черт. 50.

Пусть дана въ пространствѣ черт. 49) профильная прямая линія AB и показаны ея проекціи ab и $a'b'$. Спроектируемъ AB на вторую вертикальную (профильную) плоскость проекцій W. Очевидно, проекція $a'_1b'_1$ на этой плоскости будетъ равна и параллельна самому отрѣзку AB прямой въ пространствѣ. Продолжимъ $a'_1b'_1$ до пересѣченія съ осями OY и OZ въ точкахъ m_1' и n_1'. Нетрудно видѣть, что разстоянія точекъ m_1' и n_1' отъ оси OX будутъ равны разстояніямъ слѣдовъ M и N прямой AB до той же оси, т. е.

$$m_1'O = Mm'$$

и

$$n_1'O = Nn.$$

Кромѣ того проекціи отрѣзка $a_1'b_1'$ на оси OY и OZ будутъ соотвѣтственно равны проекціямъ AB на H и V, т. е.

$$a_0''b_0'' = a\,b$$

и

$$a_0'\,b_0' = a'b'.$$

Наконецъ:

$$Oa_0'' = m'a$$
$$Ob_0'' = m'b$$
$$Oa_0' = na'$$
$$Ob_0' = nb'.$$

Разрѣжемъ теперь плоскости W и H по линіи OY и совмѣстимъ W съ V, вращая W влѣво вокругъ OZ, и H съ V, вращая H внизъ вокругъ OX. Тогда получимъ фигуры, изображенныя на черт. 50.

Изъ разсмотрѣнія этого чертежа, гдѣ профильная прямая задана уже въ ортогональныхъ проекціяхъ, видно, что для нахожденія слѣдовъ этой прямой необходимо сдѣлать слѣдующія построенія:

1) Провести черезъ точку O оси OY и $OZ \perp OX$.

2) Найти проекціи a_0'' и b_0'' точекъ a и b на ось OY.

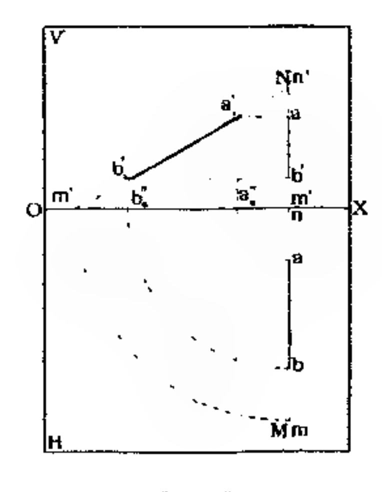
3) Описать изъ точки O какъ изъ центра дуги радіусами Oa_0'' и Ob_0'' до пересѣченія съ продолженіемъ оси OX въ точкахъ a_0'' и b_0''.

4) Возстановить въ этихъ точкахъ перпендикуляры къ OX и замѣтить точки a_1' и b_1' пересѣченія ихъ съ соотвѣтственными линіями, параллельными OX и проведенными изъ a' и b'.

5) Соединить точки a_1' и b_1' и продолжить линію a_1' и b_1' до пересѣченія съ линіей OX' въ точкѣ m_1' и съ линіей OZ въ точкѣ n_1'.

6) Провести изъ n_1' линію, параллельную OX, до пересѣченія съ продолженіемъ $a'b'$ въ точкѣ N.

7) Засѣчь линію OY дугою круга радіуса Om_1' изъ центра O въ точкѣ m_1' и провести изъ m_1', линію параллельную OX, до пересѣченія съ продолженіемъ ab въ точкѣ M.



Черт. 51.

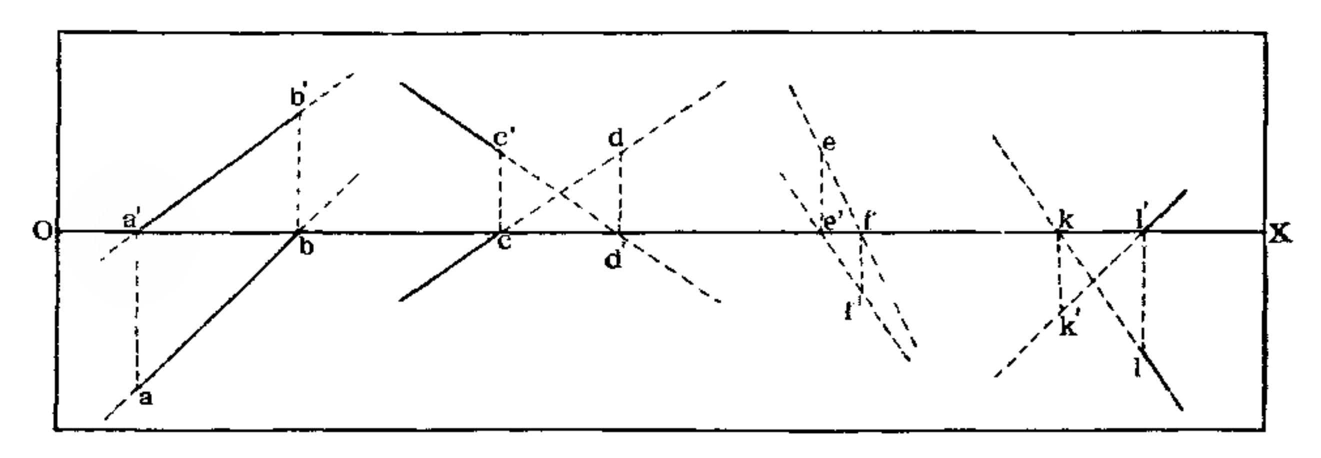
Точки M и N и будутъ искомыми слѣдами профильной линіи.

Вмѣсто профильной плоскости W, проведенной въ сторонѣ отъ линіи AB, можно было бы провести профильную плоскость черезъ линію AB и совмѣстить эту плоскость съ V. Тогда въ ортогональныхъ проекціяхъ построенія нѣсколько упрощаются, какъ это видно на чертежѣ 51.

Такъ какъ слѣды линіи раздѣляютъ прямую на части, лежащія въ разныхъ углахъ пространства, то они будутъ служить и границами видимости прямой. Поэтому проекціи прямой, лежащей въ предѣлахъ перваго угла про-

странства, мы должны, согласно высказанному ранѣе (стр. 2) условію чертить сплошной чертой, а продолженія ихъ, какъ проекціи невидимыхъ частей прямой, лежащихъ въ другихъ углахъ пространства, пунктиромъ.

Итакъ, границами видимости прямой являются ея слѣды на передней полѣ плоскости H и на верхней полѣ плоскости V. На чертежѣ 52 показаны проекціи и обозначены видимыя и невидимыя части четырехъ прямыхъ AB, CD, EF и KL, изъ которыхъ первая проходитъ въ IV, I и II углахъ, вторая въ I, II и III, третья—въ II, III и IV, а четвертая—въ I, III и IV.



Черт. 52.

Буквами обозначены слѣды прямыхъ.

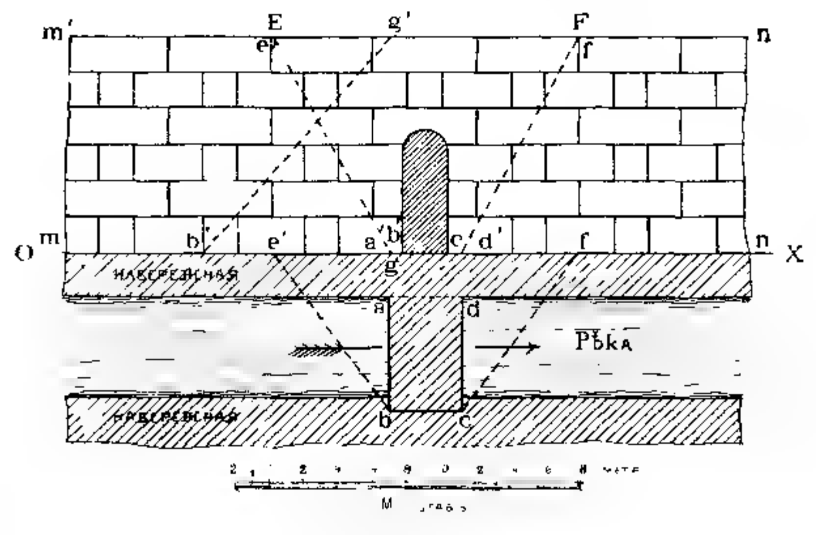
Предлагаемъ читателю показать на каждой изъ этихъ прямыхъ по три точки, лежащихъ въ разныхъ углахъ.

Замѣтимъ, что въ большинствѣ случаевъ нѣтъ необходимости прочерчивать линіи, подобныя линіямъ $a'a$, $b'b$ и т. д. (черт. 45), перпендикулярныя къ OX и соединяющія разноименныя проекціи одной и той же точки. Одинаковыя буквы a и a', b и b' и т. д., поставленныя у проекцій точки уже показываютъ, что эти точки находятся на одномъ перпендикулярѣ къ оси.

Задача № 4. На чертежѣ 53 изображены въ ортогональныхъ проекціяхъ: каменная стѣна съ воротами, рѣка съ набережными и подъемный мостъ $ABCD$ съ осью вращенія AD. Фасадъ стѣны совпадаетъ съ плоскостью V, а поверхность моста и набережной—съ плоскостью H. По верхнему краю стѣны должны быть укрѣплены два блока для цѣпей, поднимающихъ мостъ и прикрѣпляемыхъ къ концамъ его B и C. Когда мостъ опущенъ, то длины цѣпей между каждымъ блокомъ и соотвѣтствующимъ концомъ моста равны по 8 метрамъ. Опредѣлить положеніе блоковъ на краю стѣны.

Рѣшеніе. Концы оси каждой цѣпи должны лежать на плоскостяхъ проекцій, т. е. будутъ являться слѣдами этой оси на V и H. Вертикальныя проекціи этихъ концовъ каждой оси будутъ находиться: одна на линіи $m'n'$, вертикальной проекціи верхняго края стѣны, другая—на оси OX. Разность разстояній концовъ вертикальной проекціи каждой цѣпи будетъ равна разстоянію между линіями $m'n'$

и OX, т. е. длинѣ gb'. Зная же длину самой цѣпи (8 метр.), нетрудно, припоминая теорему 4-ю, построить прямоугольный треугольникъ $b_1g'b'$, у котораго гипотенуза равнялась бы 8 метр., одинъ катетъ былъ бы $g'b$. Тогда другой катетъ b_1b' будетъ равенъ длинѣ горизонтальной проекціи цѣпи.



Черт. 53

Засѣкая изъ точки b ось OX дугою круга радіуса, равнаго $b_1'b'$, получимъ точку e. Линія be и будетъ горизонтальной проекціей оси цѣпи. Возстановляя въ V изъ точки e перпендикуляръ къ OX до пересѣченія съ $m'n'$, получимъ точку e' — вертикальную проекцію центра блока E. Линія BE (be, $b'e'$) и будетъ искомой осью цѣпи. Ось другой цѣпи CF (cf, $c'f'$) будетъ расположена справа отъ моста симметрично съ лѣвой цѣпью.

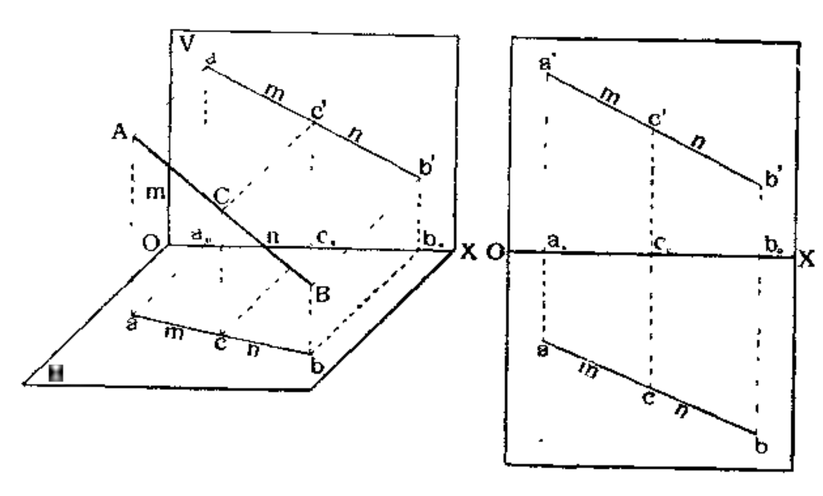
е) *Дѣленіе линіи въ данномъ отношеніи.*

Теорема 6. Если какая-нибудь точка C (черт. 54) **дѣлитъ отрѣзокъ** AB **прямой линіи въ пространствѣ въ данномъ отношеніи** $m:n$, **то и проекціи** (c **и** c') **этой точки дѣлятъ соотвѣтственныя проекціи** (ab **и** $a'b'$) **прямой въ томъ же отношеніи.**

Доказательство. Проведемъ плоскости $ABab$ и $ABa'b'$, проектирующія отрѣзокъ AB съ лежащей на немъ точкой C на H и V, и найдемъ проекціи ab, $a'b'$, c и c' отрѣзка AB и точки C на H и V. Разсматривая плоскую фигуру $ABab$, видимъ, что линіи, проектирующія точки A, B и C на H, являются взаимно параллельными, а потому онѣ раздѣляютъ прямыя AB и ab на части пропорціональныя, т. е.

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

То же самое можно сказать относительно линій AB и $a'b'$, которыя



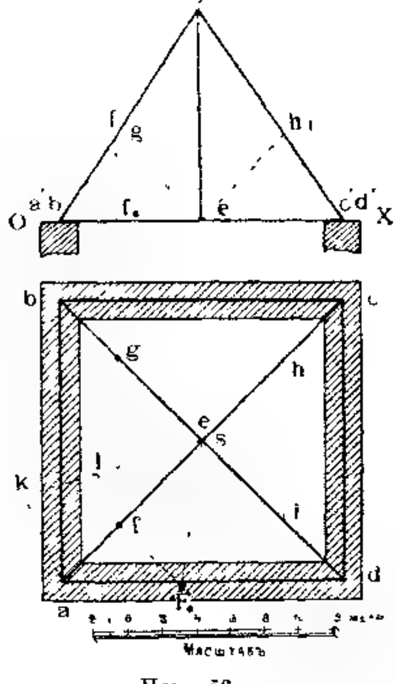
Черт. 54. Черт. 55.

раздѣлятся тремя взаимно параллельными проектирующими линіями Aa', Cc' и Bb' на части пропорціональныя, т. е.

$$\frac{a'c'}{c'b'} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

что и требовалось доказать.

На чертежѣ 55 показаны ортогональныя проекціи отрѣзка AB прямой, раздѣленной точкою C въ пространствѣ на части съ отношеніемъ $m : n$.



Черт. 56.

Задача № 5. На черт. 56 показана въ ортогональныхъ проекціяхъ схема деревянныхъ стропилъ кровли, перекрывающей зданіе, квадратное въ планѣ. Стропила состоятъ изъ четырехъ ногъ AS BS, CS и DS, пересѣкающихся въ общемъ конькѣ S.

Концы ногъ попарно соединены между собою поясами AC и BD. Въ мѣстѣ E пересѣченія поясовъ послѣдніе соединены съ конькомъ S подвѣской SF.

После окончанія постройки оказалось необходимымъ подпереть прогибающіяся ноги подкосами, которые упирались бы однимъ своимъ концомъ въ уголъ E, а другимъ—въ точки ногъ, дѣлящія длины ногъ въ отношеніи 2 : 3, считая короткія части ногъ отъ стѣнъ.

Показать на чертежѣ проекціи этихъ подкосовъ и опредѣлить длину ихъ осей.

Рѣшеніе. На основаніи теоремы 6-й дѣлимъ проекціи ногъ проекціями точекъ F, G, H и I въ отношеніи 2 : 3.

Для этого проведемъ, напримѣръ, изъ точки s случайную прямую sk и отложимъ на ней въ масштабѣ длины $sl = 3$ метр. и $lk = 2$ метр. Соединимъ точки k и a и проведемъ прямую lf, параллельную ka, до пересѣченія съ sa въ точкѣ f, которая и будетъ искомой. Вертикальная проекція f' будетъ лежать на прямой $a's$ въ точкѣ пересѣченія ея съ перпендикуляромъ, проведеннымъ къ OX изъ f. Остальныя точки G, H и I расположатся симметрично относительно точки S и линіи ss'. Проекціи подкосовъ изобразятся линіями $e'f'$, ef; $e'g'$, eg; $e'h'$, eh; $e'i'$, ei. Длины всѣхъ подкосовъ будутъ одинаковыми. Длина какого нибудь подкоса, напримѣръ, EF опредѣлится на основаніи теоремы 4-й, какъ гипотенуза eF_0 прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ ef котораго служитъ горизонтальная проекція подкоса, а другимъ — отрѣзокъ fF_0, равный разности $f'f_1$ разстояній концовъ f' и e' другой проекціи до оси OX.

§ 3. Двѣ прямыя линіи.

а) *Различныя взаимныя положенія линій.*

Двѣ прямыя линіи могутъ занимать слѣдующія характерныя положенія относительно другъ друга:

1) Онѣ могутъ быть взаимно параллельными,

2) » » взаимно пересѣкаться,

3) » » быть не параллельными и не пересѣкаться другъ съ другомъ. Такія линіи называются *скрещивающимися* въ пространствѣ или образующими *пространственный крестъ*.

Разсмотримъ, какъ отражается относительное положеніе прямыхъ въ пространствѣ на относительномъ положеніи ихъ ортогональныхъ проекцій.

1) Линіи, параллельныя другъ другу.

Пусть даны въ пространствѣ двѣ взаимно параллельныя линіи AB и CD (черт. 57).

Плоскости $ABab$ и $CDcd$, проектирующія эти линіи на H, будутъ, очевидно, взаимно параллельными, и пересѣкутся съ H по линіямъ ab и cd, взаимно параллельнымъ.

Подобнымъ же образомъ плоскости $ABa'b'$ и $CDc'd'$, проектирующія линіи AB и CD на V, будутъ также взаимно параллельными и пересѣкутся съ V по линіямъ $a'b'$ и $c'd'$, взаимно параллельнымъ.

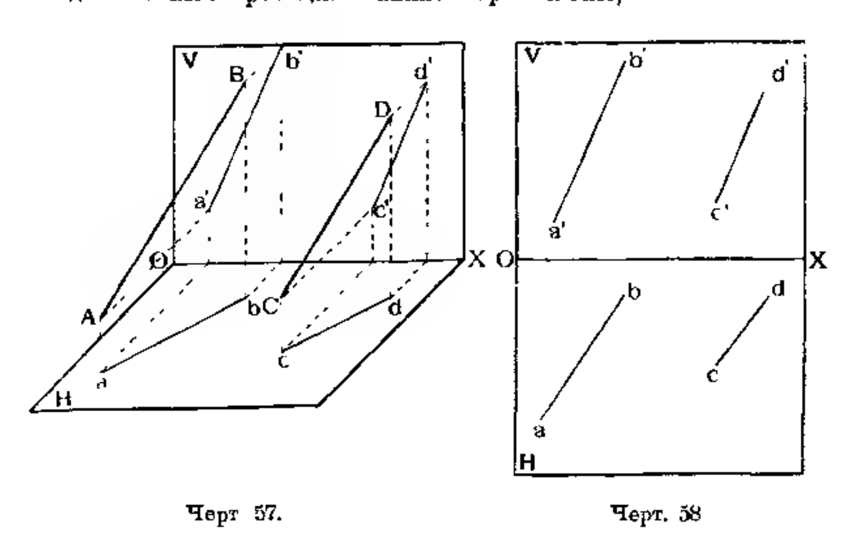
Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема 7. Одноименныя проекціи линій, параллельныхъ другъ другу въ пространствѣ, между собою параллельны.

На черт. 58 показаны проекціи двухъ линій AB и CD, параллельныхъ другъ другу, $a'b' \parallel c'd'$ и $ab \parallel cd$.

Въ частномъ случаѣ, когда линіи въ пространствѣ являются профильными, ихъ одноименныя проекціи будутъ всегда параллельны другъ другу, хотя бы сами линіи и не были взаимно параллельными. Напримѣръ, на черт. 59 показаны двѣ профильныхъ линіи AB и CD, которыя не параллельны другъ другу, а между тѣмъ у нихъ $ab \parallel cd$ и $a'b' \parallel c'd'$. На томъ же чертежѣ показаны и двѣ взаимно параллельныхъ профильныхъ линіи CD и EF. Сравнивая расположеніе проекціи линій AB, CD и EF, нетрудно замѣтить, что у линій профильныхъ и параллельныхъ другъ другу:

1) одноименныя проекціи взаимно параллельны;



Черт 57. Черт. 58

2) точки на разноименныхъ проекціяхъ одинаково расположены относительно оси, т. е.. если c дальше отъ OX, чѣмъ d, и d' дальше отъ OX, чѣмъ c', то и проекціи концовъ другой прямой также должны быть расположены, т. е. e дальше отъ оси, чѣмъ f, и f', дальше отъ оси, чѣмъ e';

3) отношенія длинъ проекцій должны быть одинаковы, т. е. должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{cd}{c'd'} = \frac{ef}{e'f'},$$

каковое нетрудно вывести изъ подобія треугольниковъ CDD_1 и EFF_1, имѣя въ виду равенство длинъ:

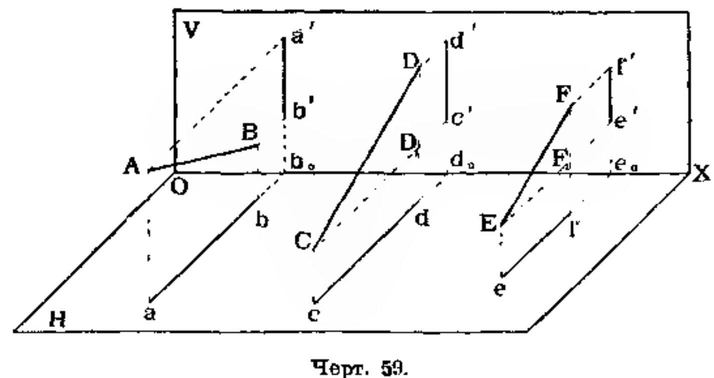
$$CD_1 = cd;\ DD_1 = d'c';\ EF_1 = ef \text{ и } FF_1 = f'e'.$$

На чертежѣ 60 показаны проекціи трехъ профильныхъ прямыхъ, изъ которыхъ CD и EF взаимно параллельны. а AD имъ не паралаельна.

2). Линіи, пересѣкающіяся другъ съ другомъ.

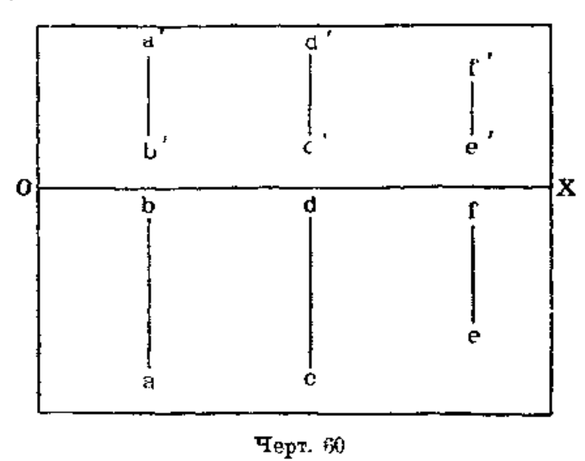
На черт. 61 представлены двѣ линіи AB и CD, пересѣкающіяся въ пространствѣ въ точкѣ E.

Такъ какъ точка E принадлежитъ обѣимъ линіямъ, то и проекціи ея должны лежать на проекціяхъ обѣихъ линій, т. е. горизонтальная про-



Черт. 59.

екція e должна лежать на пересѣченіи горизонтальныхъ проекцій ab и cd, а вертикальная e' —на пересѣченіи вертикальныхъ проекцій $a'b'$ и $c'd'$ (черт. 62).



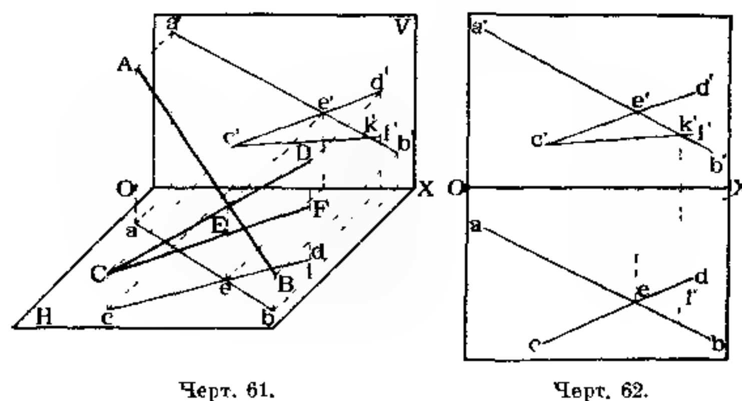
Черт. 60

Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема 8. Если прямыя линіи въ пространствѣ пересѣкаются, то и одноименныя проекціи ихъ пересѣкаются, при чемъ точки пересѣченія одноименныхъ проекцій располагаются на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX.

Такимъ образомъ, для нахожденія точки пересѣченія двухъ линій AB

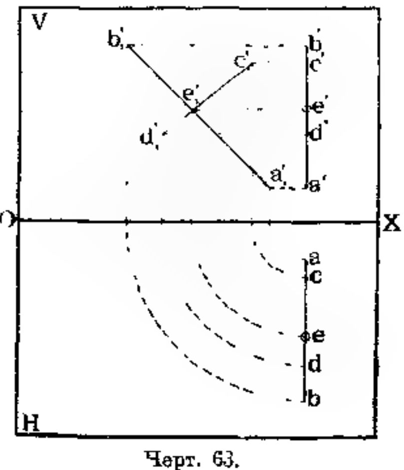
и CD, заданныхъ ортогональными проекціями, слѣдуетъ (черт. 62) продолжить ихъ горизонтальныя проекціи до пересѣченія въ точкѣ e, и вертикальныя проекціи въ точкѣ e'. Точка E $(e_1 e')$ и будетъ точкой пере-



Черт. 61. Черт. 62.

сѣченія прямыхъ, при чемъ e и e' должны располагаться на одномъ перпендикулярѣ къ OX.

Если даны двѣ профильныя линіи AB и CD (черт. 63), то найти точку ихъ встрѣчи описаннымъ пріемомъ нельзя, и тогда можно воспользоваться методомъ проектированія прямыхъ на профильную плоскость и совмѣщенія послѣдней съ V, каковой методъ мы уже примѣняли для нахожденія слѣдовъ профильной линіи (стр. 23, черт. 49—51).



Черт. 63.

На черт. 63 даны двѣ профильныхъ линіи AB и CD.

За новую вертикальную плоскость (W) проекцій принята плоскость этихъ линій. Эта плоскость совмѣщена съ плоскостью V также, какъ это было уже объяснено раньше (стр. 24). Линіи AB и CD изобразятся въ проекціи на W въ видѣ прямыхъ $a_1'b_1$ и $c_1'd_1'$, пересѣкающихся въ точкѣ e_1'. Остается теперь повернуть обратно плоскость W и найти проекціи e' и e точки E при заданномъ положеніи прямыхъ.

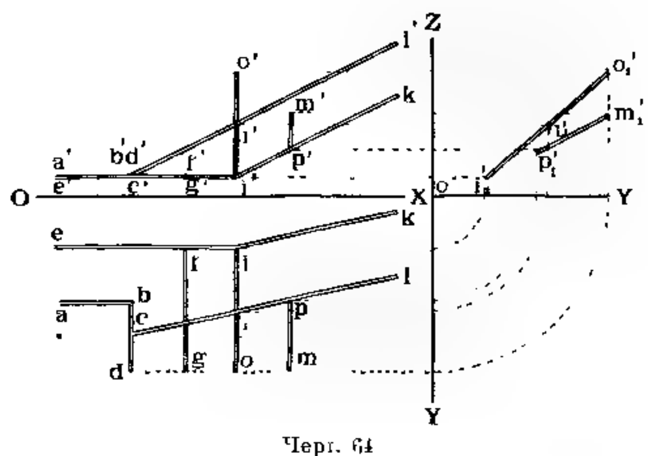
3). Линіи, не пересѣкающіяся между собою.

Если линіи въ пространствѣ при продолженіи своемъ не пересѣкаются, то для ихъ проекцій не будетъ имѣть мѣста теорема 8. На чер-

тежѣ 61 показаны двѣ такія не пересѣкающіяся линіи AB и CF, при чемъ CF имѣетъ ту же самую горизонтальную проекцію, что и CD, но вертикальную проекцію, уже другую, $c'f'$, которая пересѣкаетъ $a'b'$ уже не въ точкѣ e', а въ другой точкѣ, k'. При совмѣщеніи V съ H точки e и k', очевидно, уже не будутъ лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX.

Задача № 6. На черт. 64 показано изображеніе въ ортогональныхъ проекціяхъ системы газопроводныхъ трубъ. Показать, какія трубы параллельны другъ другу и отмѣтить точки пересѣченія трубъ.

Рѣшеніе На основаніи теоремы 7-й заключаемъ, что трубы AB, EI и IK, CL, такъ какъ соотвѣтственныя одноименныя проекціи взаимно параллельны. Кромѣ того, трубы BD и FG также взаимно параллельны, такъ какъ онѣ перпендикулярны къ V.



Черт. 64

Для того, чтобы опредѣлить, будутъ ли параллельны другъ другу трубы IO и PM, проектируемъ ихъ на профильную плоскость W и совмѣстимъ ее съ V, вращая вокругъ оси OZ вправо. Проекціями этихъ линій на W будутъ прямыя $i_1'o_1'$ и $p_1'm_1'$, не параллельныя другъ другу, слѣдовательно и въ пространствѣ линіи IO и PM будутъ другъ другу не параллельны.

Въ этой же проекціи на W видимъ, что точка l_1' лежитъ на линіи $i_1'o_1'$, но въ то же время точка l въ пространствѣ лежитъ и на линіи CL. Слѣдовательно, въ точкѣ l пересѣкаются трубы CL и IO.

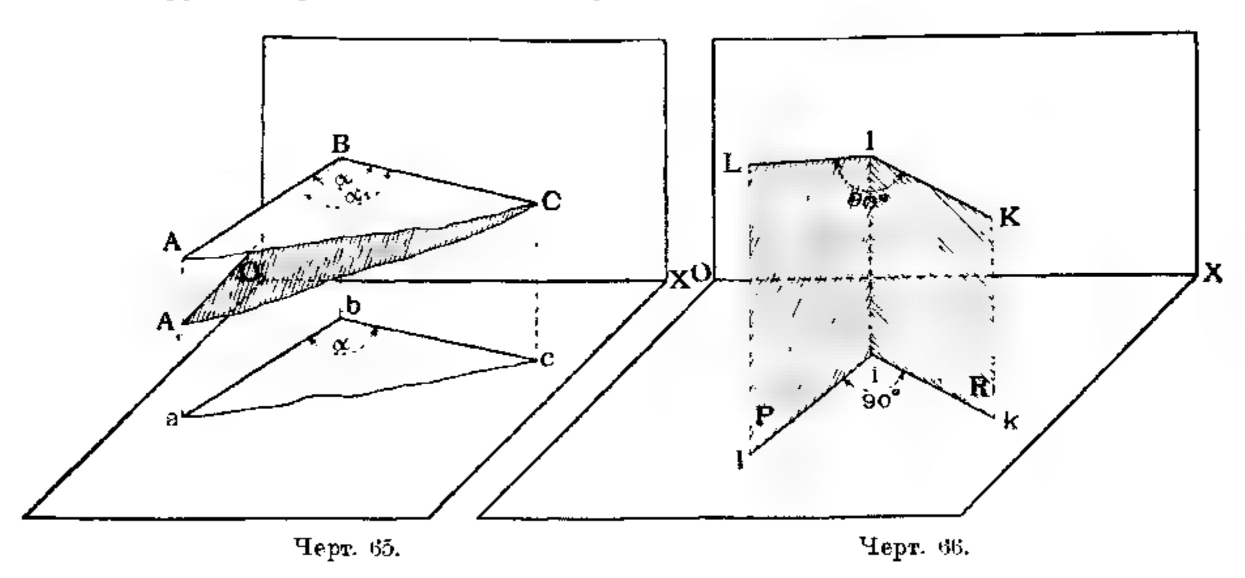
b) *Проектированіе угловъ между двумя линіями.*

Пусть данъ въ пространствѣ плоскій уголъ ABC (черт. 65). Предположимъ, что плоскость его параллельна плоскости проекцій, напримѣръ, H. Спроектируемъ обѣ линіи AB и BC на H. Нетрудно видѣть, что уголъ между проекціями ab и bc будетъ равенъ углу ABC, такъ какъ оба угла abc и ABC являются углами, образованными пересѣче-

ніемъ граней двуграннаго угла съ ребромъ Aa двумя, взаимно параллельными плоскостями, ABC и abc.

Если же плоскость проектируемаго угла будетъ не параллельна плоскости проекціи, то уголъ въ общемъ случаѣ спроектируется на эту плоскость съ искаженіемъ.

Разсмотримъ проектированіе прямого угла (черт. 66). Пусть одна сторона IK прямого угла параллельна плоскости проекцій, напримѣръ, H, а другая сторона расположена случайно, занимая положеніе LI. Спро-



Черт. 65. Черт. 66.

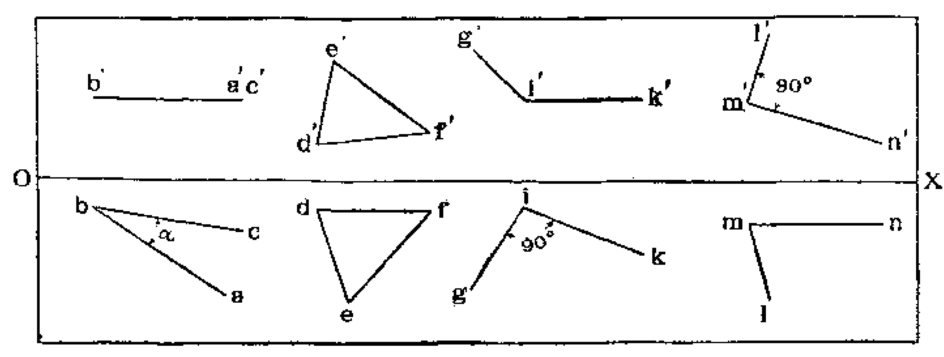
ектируемъ стороны угла на H двумя проектирующими плоскостями P и R. Линія IK, перпендикулярная къ LI и параллельная H, будетъ перпендикулярна къ линіи Ii, а. слѣдовательно. будетъ перпендикулярной и къ плоскости P. Проекція ik, параллельная IK, будетъ также перпендикулярна къ плоскости P, а, слѣдовательно, будетъ перпендикулярной и къ линіи li сѣченія плоскостей P съ H, служащей проекціей прямой LI. Такимъ образомъ, прямой уголъ LIK, одна сторона котораго параллельна H, спроектировался на H безъ искаженія.

Предшествующія разсужденія позволяютъ высказать слѣдующую теорему.

Теорема 9. Уголъ между двумя линіями проектируется безъ искаженія, если плоскость угла параллельна плоскости проекцій. Прямой же уголъ проектируется безъ искаженія, если хотя бы одна его сторона параллельна плоскости проекцій.

На черт. 67 показаны ортогональныя проекціи: угла ABC, равнаго α и проектирующагося на H безъ искаженія, треугольника DEF, углы котораго проектируются на V и H съ искаженіемъ, прямого угла GIK, проектирующагося на H безъ искаженія, такъ какъ сторона его IK па-

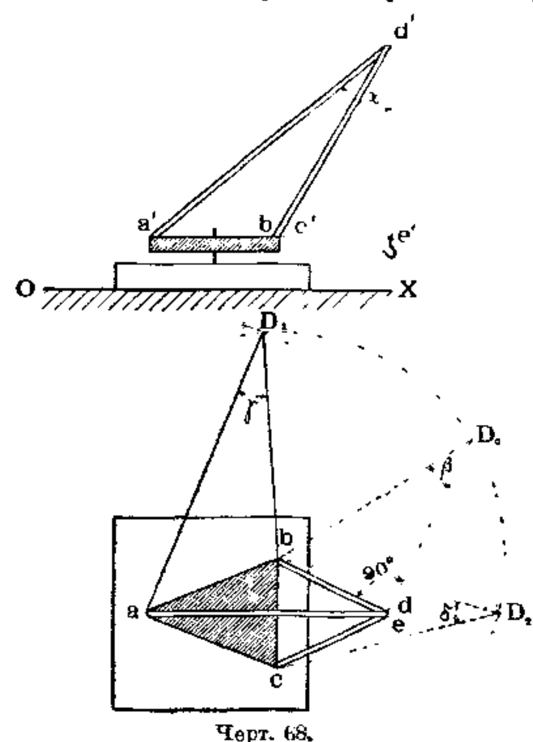
раллельна H, и прямого угла LMN, проектирующагося на V безъ искаженія, такъ какъ сторона его MN параллельна V.



Черт. 67.

Замѣтимъ, что угломъ между линіями скрещивающимися, т. е. не параллельными и не пересѣкающимися, называется уголъ между двумя прямыми параллельными даннымъ и пересѣкающимися другъ съ другомъ.

Задача № 7. На черт. 68 изображенъ поворотный подъемный кранъ со стрѣлами AD BD и CD укрѣпленными на вращающейся платформѣ ABC (на чертежѣ заштрихована). Черезъ блокъ, находящійся въ углу D, перекинута цѣпь DE Опредѣлить углы между цѣпью и каждой стрѣлой крана, а также углы между стрѣлами



Черт. 68.

Рѣшеніе. Уголъ между цѣпью и стрѣлой AD, оси которыхъ параллельны V, проектируется, согласно теоремѣ 9-й, на V безъ искаженія и равенъ углу α между $a'd'$ и $d'e$.

Уголъ между цѣпью и стрѣлой BD легко опредѣлить изъ прямоугольнаго треугольника BLE, у котораго катетъ BE проектируется на H безъ искаженія и равенъ длинѣ be, а катетъ DE проектируется на V безъ искаженія и равенъ длинѣ $d'e'$. По этимъ двумъ катетамъ строимъ на H прямоугольный треугольникъ bdD_0, у котораго $dD_0 = d'e'$. Гипотенуза bD_0 этого треугольника равна истинной длинѣ стрѣлы BD, а уголъ β при вершинѣ D_0 равенъ углу между цѣпью и стрѣлою BD и равенъ по симметріи углу между цѣпью и стрѣлой CD.

Зная длины всѣхъ стрѣлъ AD и BD, $CD = bD$ и зная, что стороны ab, bc и ac треугольника ABC проектируются на H безъ искаженія, такъ какъ платформа ABC параллельна H, нетрудно по тремъ сторонамъ построить истинныя фигуры треугольниковъ ABD и BCD. На черт. 68 треугольникъ aD_1b равенъ Δ-ку ABD, при чемъ $aD_1 = a'd'$, $bD_1 = bD_0$.

Δ-къ bcD_2 равенъ Δ-ку BCD, при чемъ $bD_2 = cD_2 = bD$. Уголъ $aD_1b = \gamma$ равенъ углу между стрѣлой AD и стрѣлами BD и CD, а уголъ $bD_2c = \delta$ углу между стрѣлами BD и CD.

§ 4. Плоскость.

а) *Заданіе плоскости.*

Въ пространствѣ плоскость можетъ быть опредѣлена слѣдующими четырьмя способами:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой линіи.

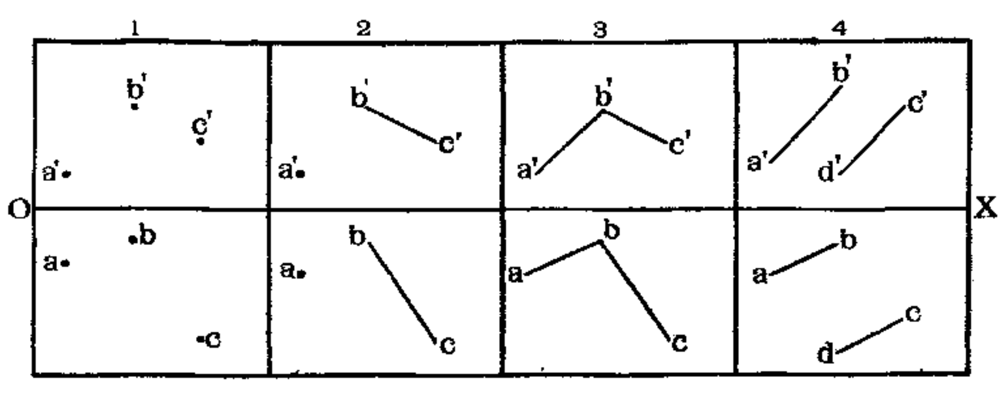
2) прямою линіею и точкою внѣ ея:

3) двумя пересѣкающимися линіями,

4) двумя параллельными линіями.

Очевидно, отъ каждаго изъ этихъ способовъ легко перейти къ другому.

На черт. 69 показаны въ ортогональныхъ проекціяхъ заданія плоскости каждымъ изъ упомянутыхъ способовъ.



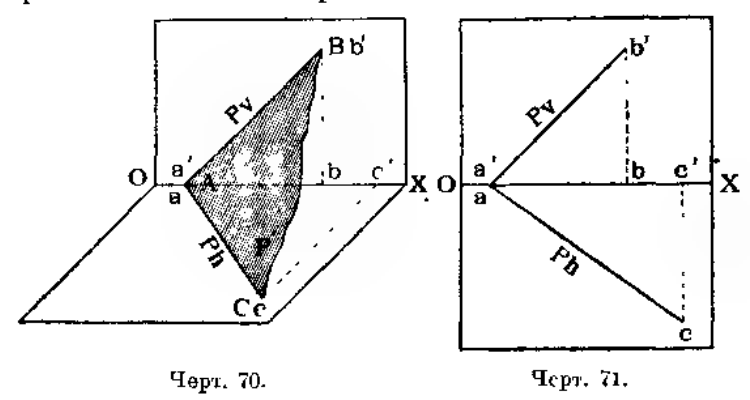
Черт. 69.

Всякая плоскость при продолженіи въ общемъ случаѣ пересѣчетъ плоскости проекцій V и H, и линіи пересѣченія съ V и H, называемыя ***слѣдами*** плоскости на плоскостяхъ проекцій, являются очень удобными для заданія плоскости, такъ какъ по расположенію этихъ линій легко судить о положеніи самой плоскости относительно плоскостей проекцій.

На черт. 70 изображена въ пространствѣ случайная плоскость P, пересѣкающая V и H.

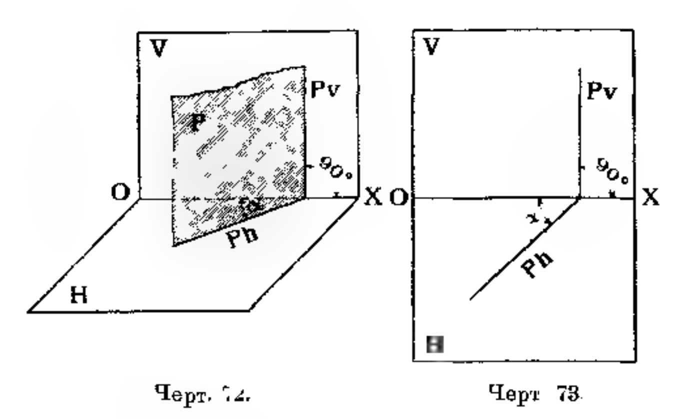
Линія AB сѣченія P съ V называется ***вертикальнымъ слѣдомъ пло-***

скости P и обозначается двумя буквами Pv, изъ которыхъ первая, большая буква, обозначаетъ плоскость P, а вторая, малая, плоскость V. Очевидно, слѣдъ Pv или AB совпадаетъ со своей вертикальной проекціей $(a'b')$, горизонтальная же его проекція совпадетъ съ осью.



Черт. 70. Черт. 71.

Линія AC сѣченія P съ H называется *горизонтальнымъ слѣдомъ плоскости* P и обозначается двумя буквами Ph. Слѣдъ этотъ совпадаетъ со своей горизонтаьной проекціей ac, вертикальная же его проекція $a'c'$ совпадетъ съ осью.



Черт. 72. Черт 73.

На чертежѣ 71 показано въ ортогональныхъ проекціяхъ заданіе случайно расположенной плоскости P слѣдами. Буквъ a, a', b,b' и c, c' можно и не ставить.

Замѣтимъ, что три плоскости P, V и H пересѣкаются въ одной точкѣ A, въ которой пересѣкаются и слѣды Pv и Ph плоскости. Точка эта лежитъ на оси OX и называется *точкою схода слѣдовъ*

b) ***Различныя положенія плоскости относительно плоскостей проекцій.***

Плоскость, которую пока будемъ обозначать буквой P, можетъ за-

нимать въ пространствѣ различныя положенія относительно плоскостей проекцій. Разсмотримъ, какимъ образомъ расположеніе плоскости P относительно H в V отзывается на расположеніе слѣдовъ Pv и Ph относительно другъ друга и оси OX.

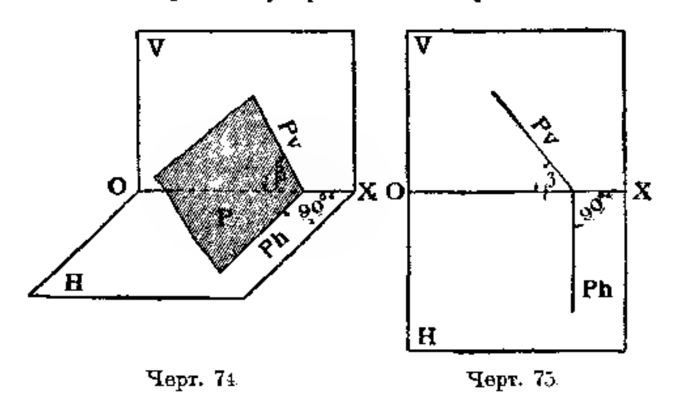
1) Плоскость P пересѣкаетъ ось OX и расположена случайно (чертежи 70 и 71).

Въ этомъ случаѣ слѣды Pv и Ph занимаютъ случайное положеніе, но должны пересѣкаться въ точкѣ схода, лежащей на оси OX.

2) Плоскость P перпендикулярна къ H (черт. 72 и 73).

Въ этомъ случаѣ вертикальный слѣдъ Pv, какъ линія сѣченія двухъ плоскостей P и V, перпендикулярныхъ съ третьей H, будетъ перпендикуляренъ къ оси OX. Слѣдъ Ph будетъ занимать случайное положеніе. Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ уголъ наклона P къ V будетъ проектироваться на H безъ искаженія и будетъ измѣряться угломъ α между Ph и OX.

3) Плоскость P перпендикулярна къ V (черт. 74 и 75).



Черт. 74. Черт. 75.

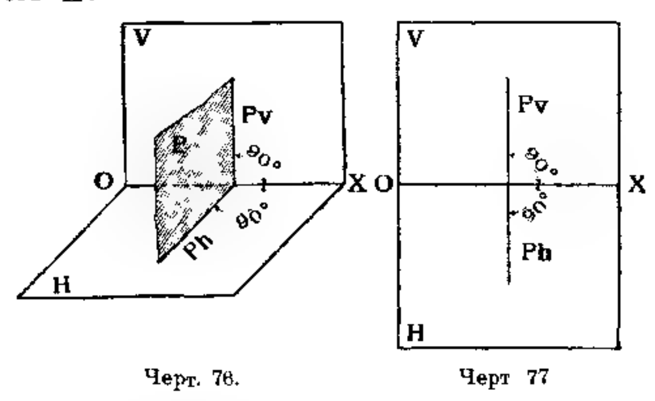
Этотъ случай аналогиченъ предыдущему. Горизонтальный слѣдъ Ph будетъ перпендикуляренъ къ оси, а вертикальный займетъ случайное положеніе.

Уголъ наклона P къ H спроектируется безъ искаженія на V и будетъ равенъ углу β между Pv и OX.

4) Плоскость P перпендикулярна и къ V и къ H, т. е. является профильной (черт. 76 и 77). Въ этомъ случаѣ оба слѣда будутъ перпендикулярны къ OX и будутъ проходить черезъ общую точку схода. При совмѣщеніи V съ H оба слѣда сольются въ одну прямую линію, перпендикулярную къ OX.

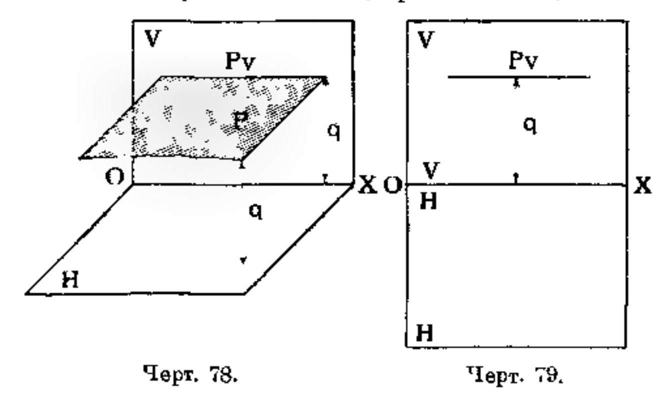
5) Плоскость P параллельна плоскости H (черт. 78 и 79). Очевидно, въ этомъ случаѣ слѣдъ Ph будетъ располагаться въ безконечно большомъ разстояніи отъ OX, а слѣдъ Pv будетъ параллеленъ OX.

Кромѣ того, разстояніе *Pv* до *OX* будетъ равно разстоянію плоскости *P* отъ *H*.



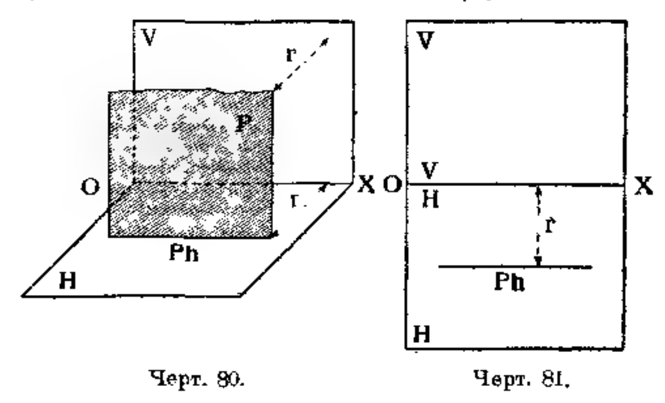
Черт. 76. Черт 77

6. Плоскость *P* параллельна *V* (черт. 80 и 81). Въ этомъ случаѣ



Черт. 78. Черт. 79.

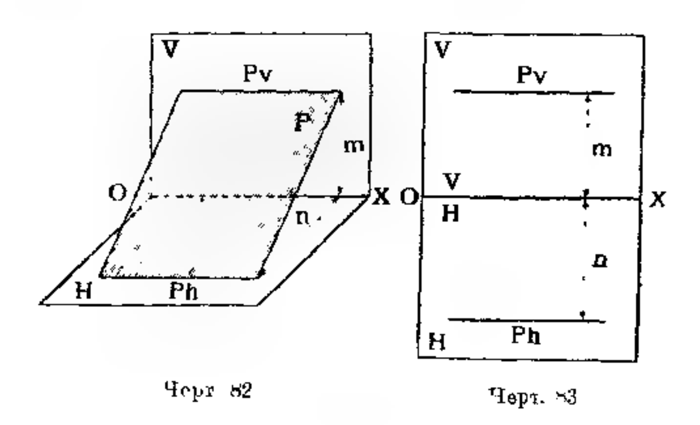
слѣдъ *Pv* будетъ параллеленъ оси *OX*, а *Ph* расположится въ безко-



Черт. 80. Черт. 81.

нечности. Разстояніе *Ph* до *OX* будетъ равно разстоянію *P* до *V*.

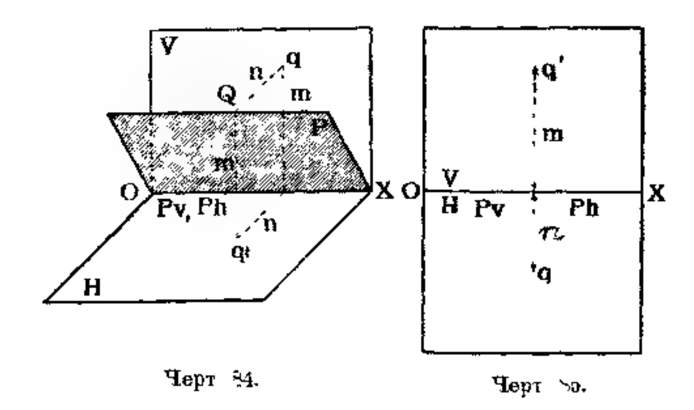
7. Плоскость P параллельна оси OX (черт 82 и 83) Въ этомъ случаѣ слѣды Pv и Ph будутъ параллельны оси OX и въ общемъ случаѣ расположатся отъ нея въ неравныхъ разстояніяхъ m и n. Если же



Черт 82 Черт. 83

эти разстоянія будутъ равны, то это покажетъ, что плоскость P наклонена къ V и H подъ одинаковыми углами, равными 45°.

8. Плоскость P проходитъ черезъ ось OX (черт. 84 и 85). Въ этомъ случаѣ оба слѣда Pv и Ph сливаются другъ съ другомъ и съ осью OX, и заданіе плоскости только слѣдами является неопредѣленнымъ, такъ какъ



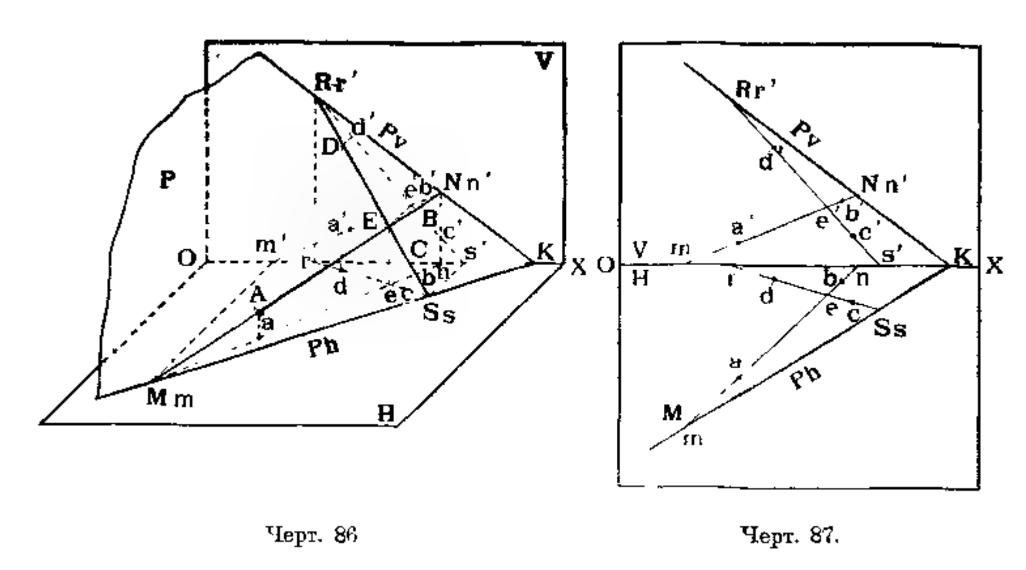
Черт 84. Черт 85.

можно провести безчисленное множество плоскостей, которыя проходили бы черезъ ось OX. Для опредѣленности заданія слѣдуетъ обозначить какую-нибудь точку Q плоскости P, не лежащую на оси OX. Если разстоянія m и n точки Q до плоскостей проекцій будутъ одинаковыми, то плоскость P совпадетъ съ биссекторной плоскостью двуграннаго угла между плоскостями V и H, и тогда всякая точка такой плоскости будетъ находиться на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ V и H.

c) *Построеніе слѣдовъ плоскости.*

Имѣя въ виду легкость опредѣленія положенія плоскости P относительно V и H по ея слѣдамъ, выгодно бываетъ перейти отъ заданія плоскости по одному изъ вышеупомянутыхъ способовъ (черт. 69) къ заданію ея слѣдами.

Такъ какъ отъ любого изъ четырехъ случаевъ заданія плоскости (чертежъ 69) легко перейти къ другому, то мы въ дальнѣйшемъ покажемъ лишь, какъ строятся слѣды плоскости, заданной двумя пересѣкающимися линіями.



Черт. 86 Черт. 87.

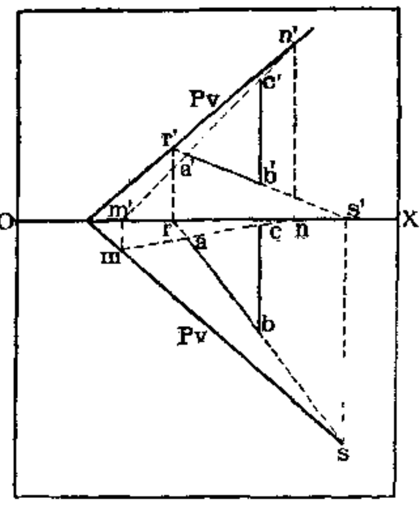
Пусть (черт. 86 и 87) дана плоскость двумя линіями AB и CD, пересѣкающимися въ точкѣ E. Если мы продолжимъ эти линіи до пересѣченія съ плоскостями проекціи и найдемъ слѣды ихъ, то, очевидно, эти послѣдніе должны принадлежать и слѣдамъ плоскости, опредѣляемой прямыми. Поэтому, задача на построеніе слѣдовъ плоскости сводится къ задачѣ на нахожденіе слѣдовъ линій, опредѣляющихъ плоскость.

На черт. 86 и 87 построены вертикальные слѣды N и R и горизонтальные слѣды M и S. Линія NR будетъ являться вертикальнымъ слѣдомъ плоскости, а линія MS — горизонтальнымъ слѣдомъ. Если построенія на черт. 87 выполнены точно, то оба слѣда должны сходиться въ общей точкѣ K схода слѣдовъ, лежащей на оси OX.

Слѣды же прямыхъ линій строятся такъ, какъ указано въ теоремѣ 5-й (стр. 22). Въ случаѣ, если одна изъ прямыхъ линій, опредѣляющихъ плоскость, является профильной линіей, слѣды которой прямо по теоремѣ 5-й

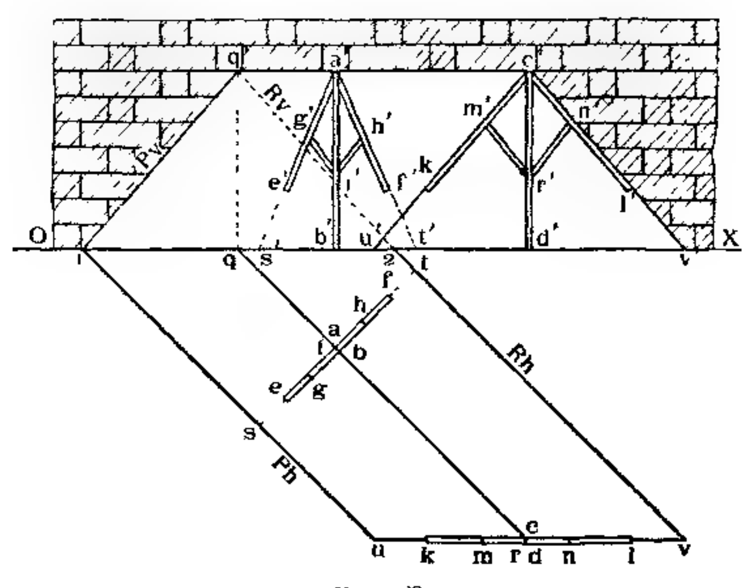
построить нельзя, то для построенія слѣдовъ плоскости можно примѣнить слѣдующій пріемъ:

Пусть (черт. 88) плоскость задана двумя линіями AB и BC, изъ которыхъ BC профильная. Выберемъ на этой линіи какую-нибудь точку C такъ, чтобы линія AC имѣла слѣды въ предѣлахъ чертежа, и строимъ слѣды M, N, R и S линій AC и AB, лежащихъ въ той же заданной плоскости. Линіи RN и MS и будутъ искомыми слѣдами плоскости.



Черт. 88.

Задача № 8. На черт. 89 въ ортогональныхъ проекціяхъ изображены 1) каменная стѣна, фасадъ которой совпадаетъ съ V, 2) стропила крыши кирпичнаго сарая, состоящія изъ стоекъ AB и CD, ногъ AE, AF, CK и CL и подкосовъ GI, HI, MR и NR. Плоскость H совпадаетъ съ поверхностью земли. Требуется построить линіи сѣченія (слѣды) крыши сарая съ землей и со стѣной, предполагая, что положеніе крыши опредѣлено ногами стропилъ.



Черт. 89.

Рѣшеніе. Находимъ горизонтальные слѣды S, T, U и V линій AE, AF, CK и CL. Соединяя попарно точки S съ U и T съ V, получимъ горизонтальные слѣды Ph и Rh или линіи сѣченія крыши съ землей.

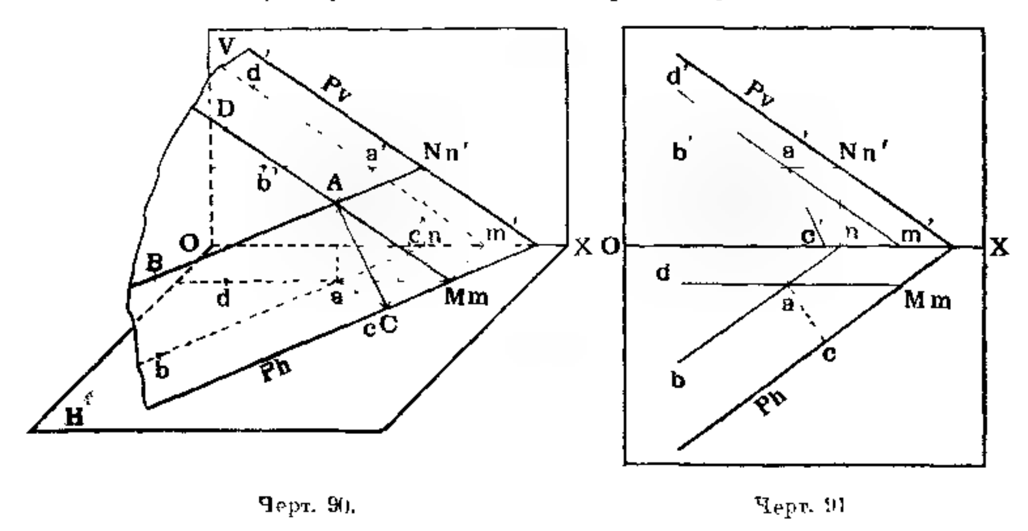
Замѣтимъ точки 1 и 2 пересѣченія этихъ слѣдовъ съ осью OX.

Далѣе находимъ вертикальный слѣдъ Q, конька крыши AC. Черезъ точку Q должны пройти вертикальные слѣды или линіи сѣченія крыши съ плоскостью стѣны. Соединяя точки 1 и 2 съ точкою Q, и получимъ эти слѣды P_v и R_v.

d) *Горизонтали и фронтали плоскости.*

Среди линій различныхъ направленій, которыя могутъ лежать въ любой плоскости, отмѣтимъ два рода линій, имѣющихъ широкое примѣненіе въ техникѣ.

Однѣ изъ линій, напримѣръ, AB на черт. 90 и 91, располагаясь въ данной плоскости, могутъ быть въ то же время горизонтальными, т. е.



Черт. 90. Черт. 91

параллельными плоскости H и слѣду Ph. Такія линіи называются *горизонталями плоскости P*. Другія линіи, напримѣръ, AD, располагаясь въ данной плоскости, могутъ быть въ то же время параллельными V и слѣду Pv. Такія линіи называются *фронталями плоскости P*. Такъ какъ горизонталь AB параллельна Ph, то ab будетъ параллельна Ph, а $a'b'$ параллельна OX (по теоремѣ 7-й, стр. 25). Подобнымъ же образомъ для фронтали AD будемъ имѣть, что $a'd'$ будетъ параллельно Pv, а ad параллельно OX.

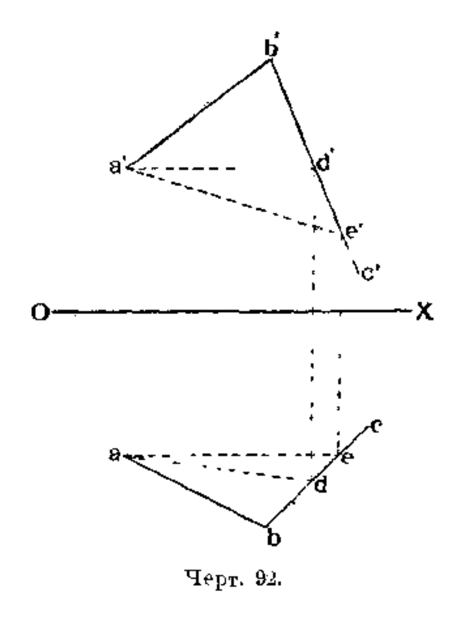
Изъ свойствъ горизонталей и фронталей вытекаетъ слѣдующій пріемъ проведенія такихъ линій въ проекціяхъ. Пусть, напримѣръ, дана плоскость P слѣдами Pv и Ph (черт. 91) и дана вертикальная проекція a' точки A при условіи, что A лежитъ въ P. Требуется провести черезъ точку A горизонталь и фронталь плоскости P.

Проводимъ черезъ a' линію $a'b'$, параллельную OX. Эта линія будетъ

вертикальной проекціей искомой горизонтали. Продолжаемъ $a'b'$ до пересѣченія съ Pv въ точкѣ n', которая будетъ служить вертикальнымъ слѣдомъ N линіи AB. Горизонтальная проекція n этого слѣда расположится на оси OX. Проводимъ черезъ n параллельно Ph линію nb, которая будетъ горизонтальной проекціей горизонтали AB. Горизонтальная проекція a точки A будетъ лежать на линіи nb въ мѣстѣ пересѣченія ея съ перпендикуляромъ къ OX, проведеннымъ изъ a'

Для построенія фронтали AD проводимъ черезъ a' линію $a'd'$, параллельную Pv, до пересѣченія съ OX въ точкѣ m', которая будетъ вертикальной проекціей горизонтальнаго слѣда фронтали. Самый же слѣдъ M будетъ лежать на слѣдѣ Ph въ точкѣ пересѣченія его съ перпендикуляляромъ къ OX, возстановленнымъ изъ точки m. Проведя изъ M линію Md, параллельную OX, получимъ горизонтальную проекцію фронтали. На линіи Md найдемъ и точку a, горизонтальную проекцію точки A.

Замѣтимъ, что въ геологіи, гдѣ часто говорится о наклонныхъ пластахъ какой нибудь породы, а также и въ геодезіи, при изученіи неровностей поверхности земли, горизонталь какого-нибудь слоя земли называется *простираніемъ* этого слоя, а уголъ между нею и меридіаномъ мѣста называется *угломъ простиранія*. Линія же AC, лежащая въ плоскости (черт. 90 и 91) и перпендикулярная къ горизонтали, а, слѣдовательно, и къ слѣду Ph, называется *паденіемъ* плоскости или *линіей наибольшаго ската* плоскости. Уголъ между нею и ея горизонтальной проекціей измѣряетъ наклонъ плоскости P къ горизонтальной плоскости и называется *угломъ паденія* плоскости P или *угломъ ея наибольшаго ската*. Такъ какъ уголъ между AC и Ph—прямой, и одна сторона его Ph лежитъ въ плоскости H, то на основаніи теоремы 9-й онъ спроектируется на H безъ искаженія, т. е. ac будетъ перпендикулярна Ph.



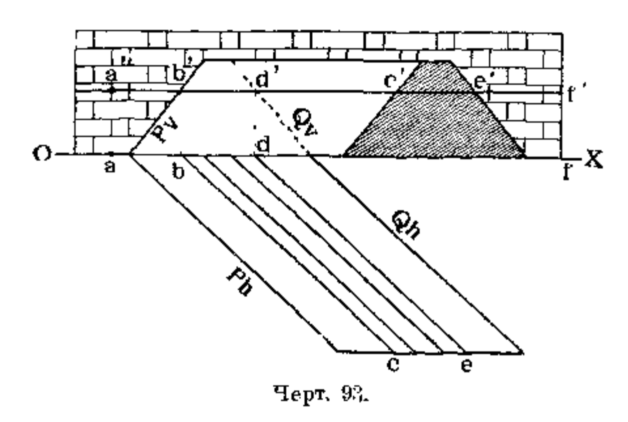
Черт. 92.

Посмотримъ теперь, какъ строятся горизонтали и фронтали плоскости въ случаѣ, если послѣдняя задана не слѣдами, а двумя пересѣкающимися линіями.

На черт. 92 задана въ ортогональныхъ проекціяхъ плоскость двумя пересѣкающимися линіями AB и BC.

Проведемъ въ плоскость горизонталь, проходящую черезъ точку A. Для этого черезъ a' проведемъ линію, параллельную оси OX, до пересѣченія съ $b'c'$ въ точкѣ d' и спроектируемъ d' на bc въ точку d. Линіи $a'd'$ и ad и будутъ проекціями искомой горизонтали. Если бы мы построили горизонтальный слѣдъ плоскости ABC, то онъ былъ бы параллеленъ ad. Для построенія фронтали плоскости ABC проведемъ черезъ a линію, параллельную оси OX, до пересѣченія съ bc въ точкѣ e и спроектируемъ e на $b'c'$ въ точку e'. Линіи ae и $a'e'$ и будутъ проекціями искомой фронтали. Если бы мы построили вертикальный слѣдъ плоскости ABC, то онъ оказался бы параллельнымъ линіи $a'e'$.

Задача № 9. На черт. 93 изображена въ ортогональныхъ проекціяхъ каменная набережная, фасадъ которой совпадаетъ съ плоскостью V. Къ набережной примыкаетъ земляная дамба трапецевиднаго сѣченія. За плоскость H принято дно рѣки. Замѣчено, что во время наводненія вода поднимается до точки A, отмѣченной на набережной. Показать линіи урѣза воды на набережной и дамбѣ на уровнѣ точки A.



Черт. 93.

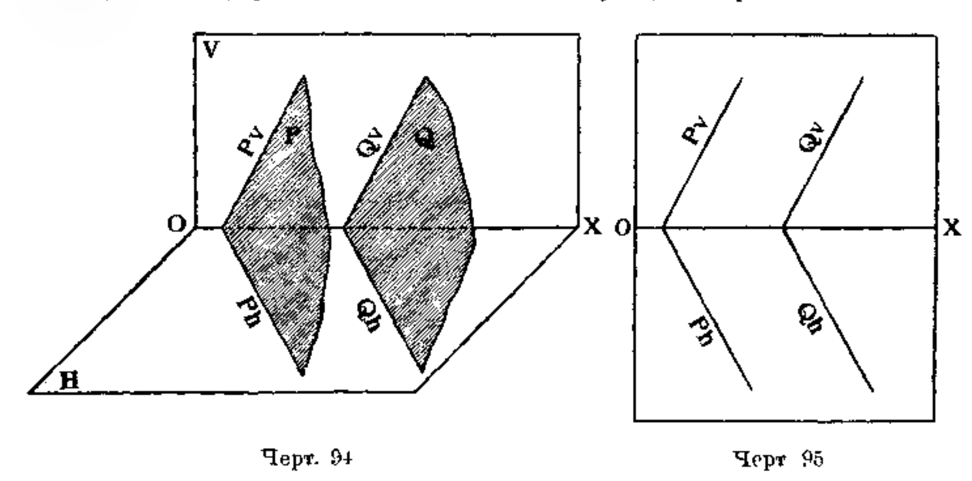
Рѣшеніе. Задача сводится къ проведенію горизонталей въ плоскостяхъ: стѣны набережной и откосовъ дамбы на высотѣ aa'. Вертикальной проекціей этихъ горизонталей будетъ служить линія $a'f'$, параллельная OX. Линія эта встрѣчаетъ слѣды Pv и Qv плоскостей откосовъ дамбы въ точкахъ b' и d', которыя являются вертикальными слѣдами искомыхъ горизонталей этихъ плоскостей. Горизонтальныя проекціи b и d будутъ лежать на оси OX; проекціи bc и de горизонталей откосовъ пойдутъ параллельно слѣдамъ Ph и Qh и встрѣтятъ торецъ дамбы въ точкахъ c и e. Линія CE будетъ урѣзомъ воды на торцѣ дамбы. Линіи же AB и DF будутъ урѣзомъ воды на набережной.

§ 5. Двѣ плоскости.

а) *Относительное положеніе двухъ плоскостей.*

Двѣ плоскости въ пространствѣ могутъ быть или взаимно параллельными, въ частномъ случаѣ сливаясь другъ съ другомъ, или могутъ пересѣкаться другъ съ другомъ.

На чертежѣ 94 изображены въ пространствѣ двѣ взаимно параллельныя плоскости P и Q. Онѣ, очевидно, пересѣкаются плоскостями V и H по линіямъ, соотвѣтственно параллельнымъ другъ другу, т. е. $Pv \parallel Qv$ и $Ph \parallel Qh$. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема.



Черт. 94 Черт 95

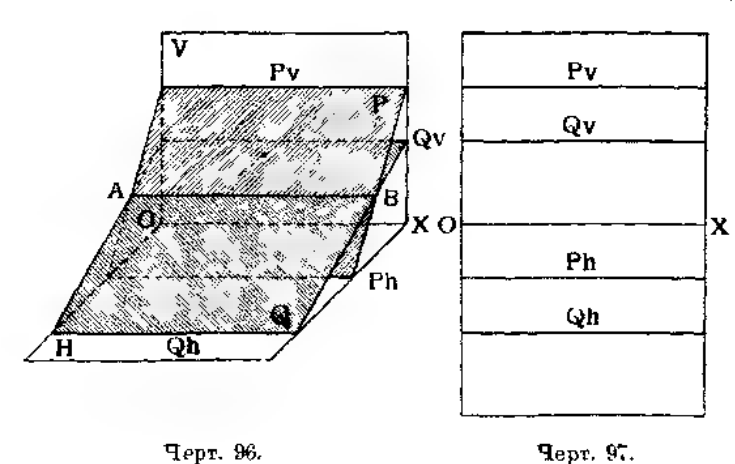
Теорема 10. Если плоскости параллельны другъ другу, то и одноименные слѣды ихъ взаимно параллельны.

На черт. 95 показаны въ ортогональныхъ проекціяхъ двѣ взаимно-параллельныя плоскости P и Q.

Обратная теорема также имѣетъ мѣсто.

Теорема 11. Если одноименные слѣды двухъ плоскостей параллельны другъ другу, то въ общемъ случаѣ плоскости взаимно параллельны.

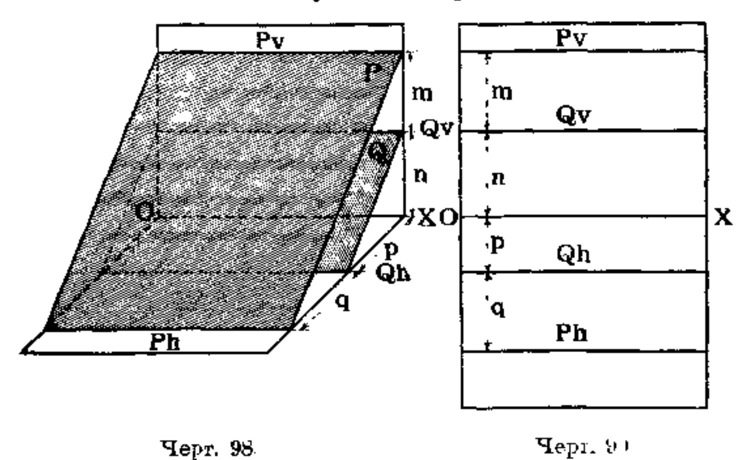
Въ частномъ случаѣ, если плоскости параллельны оси OX (чер. 96),



Черт. 96. Черт. 97.

то онѣ могутъ пересѣкаться по линіи AB, параллельной OX, имѣя въ то же время слѣды параллельными другъ другу (черт. 96 и 97).

Въ этомъ случаѣ для того, чтобы по параллельности другъ другу слѣдовъ судить о параллельности плоскостей, необходимо теорему 11-ю пополнить условіемъ, чтобы отношеніе разстояній вертикальныхъ слѣдовъ до оси равнялось отношенію разстояній соотвѣтственныхъ горизонтальныхъ слѣдовъ до оси, что явствуетъ изъ чертежей 98 и 99, гдѣ изображены двѣ плоскости,

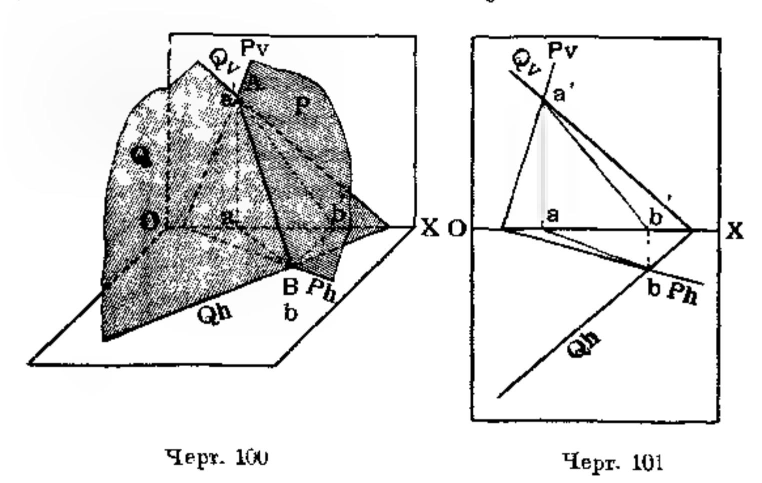


Черт. 98 Черт. 99

параллельныя другъ другу и оси OX. Въ этомъ случаѣ должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p}.$$

Кромѣ того, необходимо, чтобы слѣды эти были одинаково расположены относительно OX, т. е., если Pv дальше отъ OX, чѣмъ Qv, то и Ph должно быть дальше отъ OX, чѣмъ Qh.



Черт. 100 Черт. 101

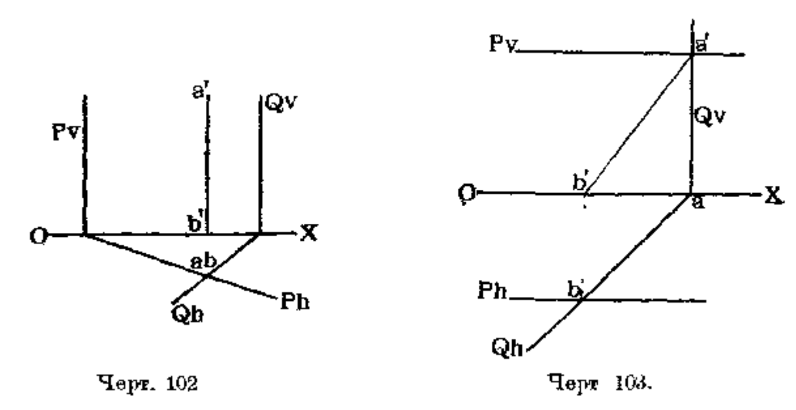
Наконецъ, если плоскости въ пространствѣ пересѣкаются, то и одноименные слѣды ихъ въ общемъ случаѣ пересѣкаются (черт. 100 и 101).

Въ частномъ же случаѣ, когда плоскости хотя и пересѣкаются, но въ то же время параллельны оси OX (черт. 96 и 98), слѣды ихъ могутъ быть и взаимно параллельными.

b) *Построеніе линій сѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ слѣдами*

Теорема 12. Линія пересѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ слѣдами, проходитъ черезъ точки пересѣченія одноименныхъ слѣдовъ плоскостей.

Дѣйствительно, линія AB сѣченія двухъ плоскостей P и Q (черт. 100 и 101) вполнѣ опредѣляется, если извѣстны двѣ точки A и B пересѣченія одноименныхъ слѣдовъ плоскости. Поэтому (черт. 101) для построенія этой линіи достаточно продолжить Pv и Qv до пересѣченія другъ съ другомъ въ точкѣ A (a, a') и Ph и Qh до пересѣченія другъ съ другомъ въ точкѣ B (b, b') Линія AB $(ab, a'b')$ и будетъ искомой.



Черт. 102 Черт 103.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ пересѣченія плоскостей другъ съ другомъ.

1. Плоскости P и Q перпендикулярны къ H (черт. 102) Въ этомъ случаѣ и линія AB сѣченія ихъ будетъ также перпендикулярна къ H и спроектируется на H въ видѣ точки (a, b), находящейся въ мѣстѣ пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ Ph и Qh. Вертикальная же проекція $a'b'$ будетъ перпендикулярна къ OX.

2. Плоскость P параллельна OX, а Q перпендикулярна къ H (черт. 103)

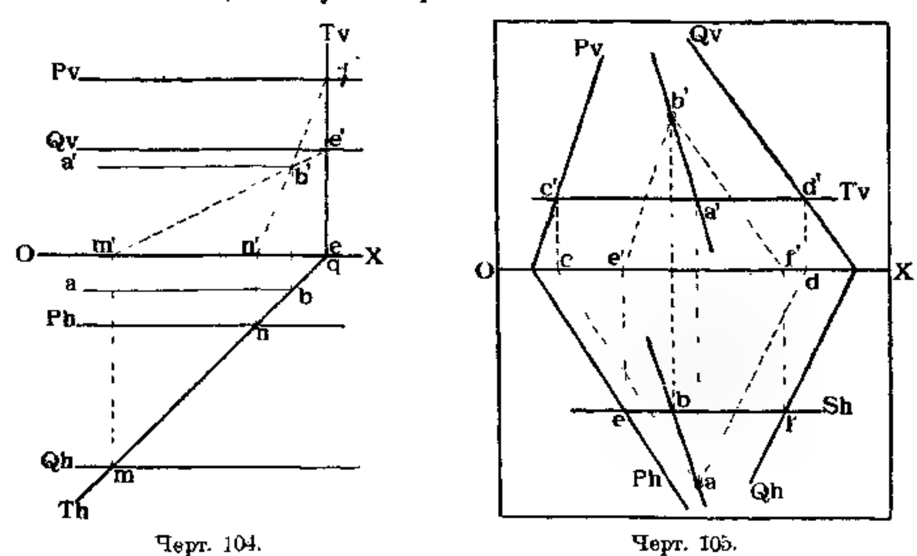
Линія AB строится по общему правилу, т. е. замѣчаемъ точку A пересѣченія Pv съ Qv и точку B пересѣченія Ph съ Qh и соединяемъ эти точки другъ съ другомъ.

3. Плоскости P и Q параллельны оси OX (черт. 104).

Въ этомъ случаѣ искомая линія сѣченія будетъ параллельна OX и для построенія ея достаточно найти одну ея точку.

Проведемъ случайную плоскость T, напримѣръ, перпендикулярную къ H, и найдемъ, какъ это было показано только что выше (случай 2)

линіи ME и NQ сѣченія T съ Q и P. Точка B пересѣченія линіи ME и NQ, принадлежа одновременно плоскостямъ P и Q, будетъ находиться на искомой линіи сѣченія. Проводя черезъ b' и b линіи $a'b'$ и ab, параллельныя оси OX, и получимъ проекціи линіи AB



Черт. 104. Черт. 105.

4. Плоскости P и Q заданы случайно, но такъ, что одноименные слѣды ихъ не пересѣкаются въ предѣлахъ чертежа (черт. 105).

Для нахожденія линіи сѣченія плоскостей P и Q воспользуемся пріемомъ, примѣненнымъ въ случаѣ 3-мъ, т. е. будемъ находить линіи сѣченія обѣихъ плоскостей съ нѣкоторою новою, вспомогательною, которую выберемъ такъ, чтобы линіи сѣченія ея съ P и съ Q было бы нетрудно построить. Проведемъ, напримѣръ, плоскость S параллельно V. Плоскости S и P пересѣкутся по линіи EB, параллельной Pv. Горизонтальная проекція Sb сольется со слѣдомъ Sh, а вертикальная $e'b'$ будетъ параллельна Pv. Линія FB сѣченія плоскостей S и Q будетъ параллельна Qv, при чемъ fb сольется съ Sh, а $f'b'$ будетъ параллельна Qv. Точка B (b, b') пересѣченія линій EB и FB будетъ принадлежать искомой линіи сѣченіи плоскостей P и Q.

Проведя вторую вспомогательную плоскость, напримѣръ, T, параллельную H и найдя линіи сѣченія CA и DA ея съ P и Q, получимъ въ точкѣ A пересѣченія этихъ линій вторую точку A, которая вмѣстѣ съ точкой B и опредѣлить искомую линію.

Задача № 10. На черт. 106 изображены двускатныя крыши двухъ галлерей, упирающихся въ стѣну дома, фасадъ которой принять за плоскость V и заштрихованъ на чертежѣ. Линіи карнизовъ крышъ лежать въ одной горизонтальной плоскости, принятой за плоскость H.

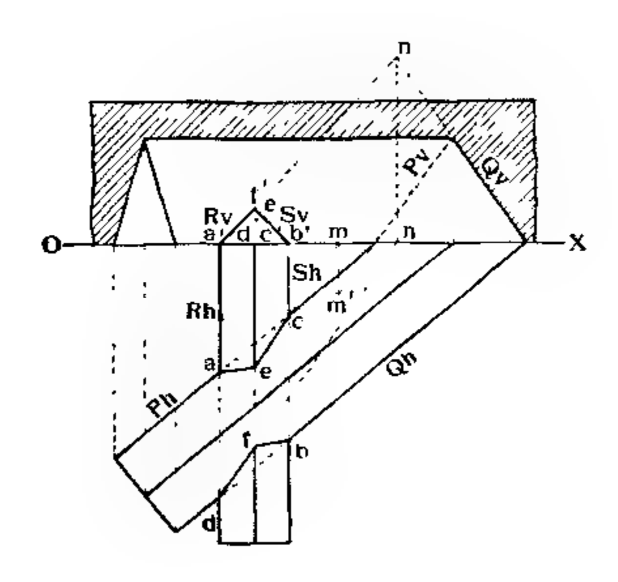
Построить линіи сѣченія крышъ.

Рѣшеніе

Такъ какъ на чертежѣ даны слѣды граней крышъ на *V* и *H*, то задача сводится къ построенію линій сѣченія плоскостей, заданныхъ слѣдами.

Грани крыши большой галлереи обозначены буквами *P* и *Q*, а слѣды ихъ — *Pv*, *Ph*, *Qv* и *Qh*. Грани крыши малой галлереи обозначены буквами *R* и *S*, а слѣды ихъ *Rv*, *Rh*, *Sv* и *Sh*.

На чертежѣ отмѣчаетъ точки *A*, *B*, *C* и *D* пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ *Ph*, *Qh*, *Rh* и *Sh* между собою. Черезъ эти точки будутъ проходить искомыя линіи сѣченія. Далѣе, найдемъ, напримѣръ, линію сѣченія граней *R* и *Q*.



Черт. 106.

Продолжаемъ слѣды *Rv* и *Qv* до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ *N* (*n'n*) и соединяемъ точку *N* съ ранѣе найденной точкой *D*, принадлежащей линіи сѣченія тѣхъ же плоскостей. Линія *DN* и будетъ линіей сѣченія граней *R* и *Q*. Намъ нужна лишь часть *DF* этой линіи между карнизомъ и конькомъ крыши малой галлереи. Соединяя точку *F* съ *B*, получимъ линію *FB* сѣченія грани *S* съ *Q*.

Найдемъ теперь линію сѣченія граней *S* и *P*. Продолжаемъ слѣды *Sv* и *Pv* до пересѣченія въ точкѣ *M*, оказавшейся на нижней полѣ плоскости *V*. Соединяемъ точку *M* съ точкой *C*, принадлежащей также искомой линіи, и получаемъ линію *MS* сѣченія граней *S* и *Q*.

Намъ нужна также лишь часть *EC* этой линіи между карнизомъ и конькомъ крыши малой галлереи. Соединяя точку *E* съ *A*, получаемъ линію *AE* сѣченія грани *R* съ *P*.

---

§ 6. Прямая линія и плоскость.

Прямая линія можетъ занимать относительно плоскости слѣдующія положенія въ пространствѣ:

а) она можетъ лежать въ плоскости;

b) она можетъ быть ей параллельна;

c) она можетъ съ ней пересѣкаться. При этомъ:

d) линія можетъ быть перпендикулярной къ плоскости, или

e) линія можетъ быть наклоненной къ плоскости подъ даннымъ угломъ.

Не всегда то или иное относительное положеніе прямой и плоскости ясно характеризуется взаимнымъ положеніемъ ихъ проекцій.

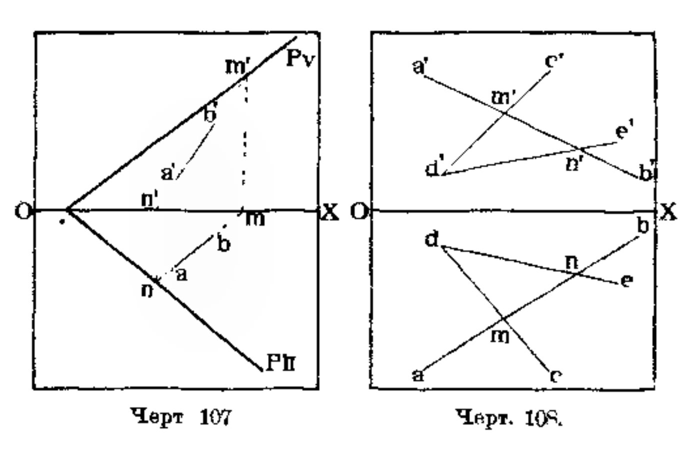
Въ большинствѣ случаевъ для выясненія истиннаго положенія прямой и плоскости необходимо прибѣгать къ вспомогательнымъ построеніямъ.

Плоскость чаще всего задается въ проекціяхъ либо ея слѣдами на V и H, либо двумя пересѣкающимися линіями.

Въ дальнѣйшемъ, разсматривая разные случаи взаимнаго расположенія прямой линіи и плоскости, мы будемъ параллельно рѣшать задачу при обоихъ видахъ заданія плоскости.

a) *Прямая линія лежитъ въ плоскости.*

Если прямая линія лежитъ въ плоскости, то она должна имѣть съ ней по крайней мѣрѣ двѣ общія точки. Поэтому для того, чтобы задаться въ плоскости прямой линіей, достаточно соединить между собой



Черт 107 Черт. 108.

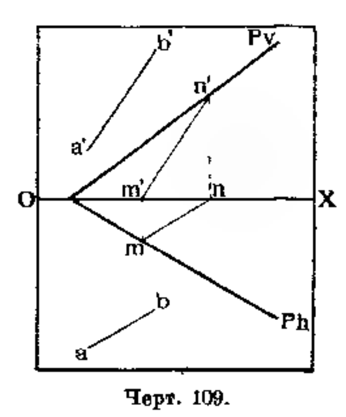
двѣ точки, завѣдомо лежащія въ плоскости. На черт. 107 плоскость P задана слѣдами, на которыхъ выбраны двѣ точки M и N. Линія AB, проходящая черезъ эти точки, будетъ лежать въ плоскости P. На чертежѣ 108 плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями DC и DE. Задаваясь на этихъ прямыхъ точками M и N и соединяя ихъ другъ съ другомъ, получимъ прямую AB, лежащую въ данной плоскости

Для того, чтобы узнать, лежитъ ли данная прямая въ данной плоскости, слѣдуетъ опредѣлить, нѣтъ ли двухъ точекъ общихъ и прямой

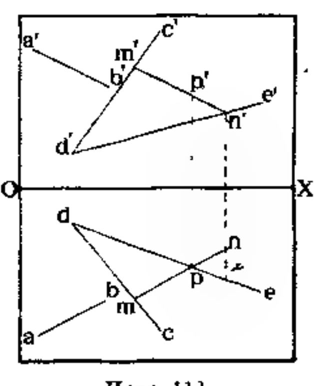
линіи и плоскости. Напримѣръ, линія AB (черт. 107) при своемъ продолженіи пересѣкаетъ слѣды плоскости P въ точкахъ M и N, слѣдовательно, AB лежитъ въ плоскости P. Точно также линія AB (черт. 108) пересѣкаетъ линіи DC и DE въ точкахъ M и N, поэтому AB лежитъ въ плоскости CDE.

b) *Прямая линія параллельна плоскости.*

Если прямая линія параллельна плоскости, то въ послѣдней всегда можно провести линію, параллельную данной прямой. Поэтому для того, чтобы узнать, параллельна ли прямая AB плоскости P (черт. 109), слѣдуетъ въ послѣдней выбрать какую-нибудь точку, напримѣръ, M на слѣдѣ Ph, и провести черезъ нее прямую MN, параллельную AB.



Черт. 109.



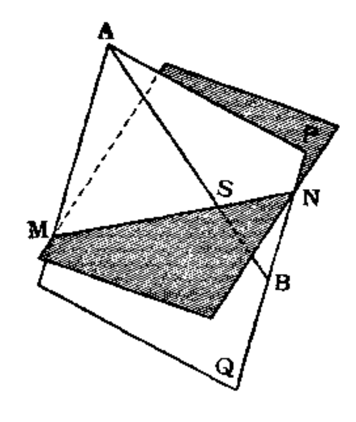
Черт. 110.

Если вертикальный слѣдъ N прямой MN расположится на слѣдѣ Pv плоскости, то это покажетъ, что прямая MN лежитъ въ плоскости P, а, слѣдовательно, AB параллельна P, какъ это и имѣетъ мѣсто на чертежѣ 109. Если же точка N не попадетъ на слѣдъ Pv, то MN не будетъ лежать въ плоскости P, и прямая AB не будетъ параллельна P.

Если плоскость задана двумя пересѣкающимися прямыми линіями CD и ED (черт. 110), то для того, чтобы узнать, параллельна ли прямая AB этой плоскости, выбираемъ случайную точку M на одной изъ прямыхъ, напримѣръ, CB, проводимъ черезъ M прямую MN, параллельную AB, и смотримъ, лежитъ ли MN въ плоскости CDE или нѣтъ. Въ данномъ случаѣ точки n' и p пересѣченія проекцій $m'n'$ съ $d'e'$ и mn съ de лежатъ не на одномъ перпендикулярѣ къ оси, слѣдовательно, по теоремѣ 8-й (стр. 30) прямая MN не пересѣкается съ DE, а потому MN не будетъ лежать въ плоскости CDE, и прямая AB не будетъ параллельна этой плоскости.

c) *Прямая линія пересѣкается съ плоскостью.*

На чертежѣ 111 показаны въ пространствѣ плоскость P и прямая AB. Найдемъ точку M пересѣченія AB съ P. Для этого въ пространствѣ необходимо сдѣлать слѣдующія построенія:



Черт. 111.

Проведемъ черезъ AB случайную плоскость Q и найдемъ линію MN сѣченія плоскостей P и Q. Точка S пересѣченія прямыхъ AB и MN и будетъ искомой.

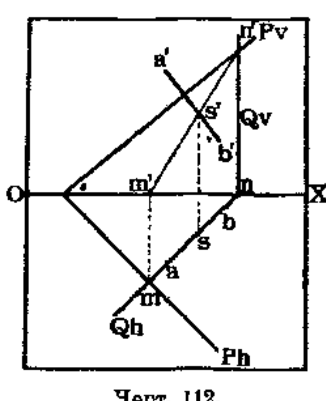
Рѣшимъ теперь эту задачу въ проекціяхъ.

На черт. 112 плоскость P задана слѣдами.

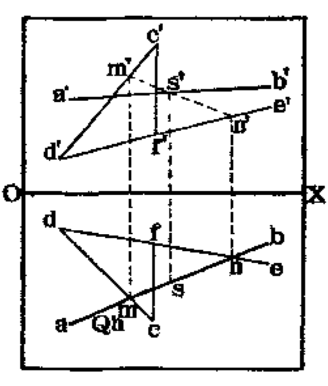
Проведемъ черезъ AB плоскость Q, напримѣръ, перпендикулярно къ H. Тогда слѣдъ Qh сольется съ ab, а Qv пойдетъ перпендикулярно OX.

Найдемъ линію MN пересѣченія P съ Q и замѣтимъ точку S пересѣченія AB съ MN.

Пусть теперь плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями CB и BE (черт. 113). Найдемъ пересѣченіе съ нею линіи AB.



Черт. 112.



Черт. 113.

Проведемъ черезъ AB плоскость Q перпендикулярно къ H. Слѣдъ Qh сольется съ ab.

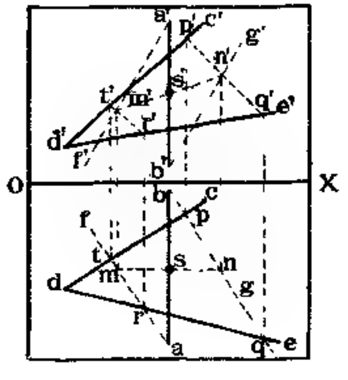
Всѣ точки, находящіяся въ плоскости Q, будутъ въ проекціи на H располагаться по слѣду Qh, такъ какъ Q проведена перпендикулярно къ H. Поэтому и точки M и N пересѣченія прямыхъ CD и BE съ Q въ горизонтальной проекціи также должны лежать на Qh, но въ то же

время эти точки лежатъ и на прямыхъ CD и DE. Поэтому горизонтальныя проекціи m и n этихъ точекъ опредѣлятся пересѣченіемъ Qh съ cd и de. Вертикальныя же проекціи m' и n' должны лежать на соотвѣтственныхъ вертикальныхъ проекціяхъ $c'd'$ и $d'e'$ прямыхъ.

Соединяемъ точки m' и n' и замѣчаемъ точку s' пересѣченія $a'b'$ съ $m'n'$. Горизонтальная проекція s будетъ лежать на Qh. Точка S и будетъ искомой.

Если одна изъ линій, напримѣръ, CF (черт. 113), опредѣляющихъ плоскость, является профильной, то ее можно сейчасъ же замѣнить другою, напримѣръ, DF, лежащей въ той-же плоскости, и рѣшать задачу, какъ было выше объяснено.

Въ случаѣ, если требуется найти сѣченіе плоскости съ профильной линіей, то вспомогательную плоскость слѣдуетъ проводить черезъ эту линію не перпендикулярно къ H, а случайно. На черт. 114 задана плоскость двумя пересѣкающимися линіями CB и ED, требуется найти пересѣченіе этой плоскости съ профильной линіей AB.



Черт. 114.

Проведемъ черезъ точки A и B двѣ случайныя, но взаимно параллельныя линіи AF и BG, которыя будутъ лежать съ AB въ одной вспомогательной плоскости. Найдемъ, какъ ранѣе было указано, точки M и N пересѣченія линій AF и BG съ плоскостью CDE.

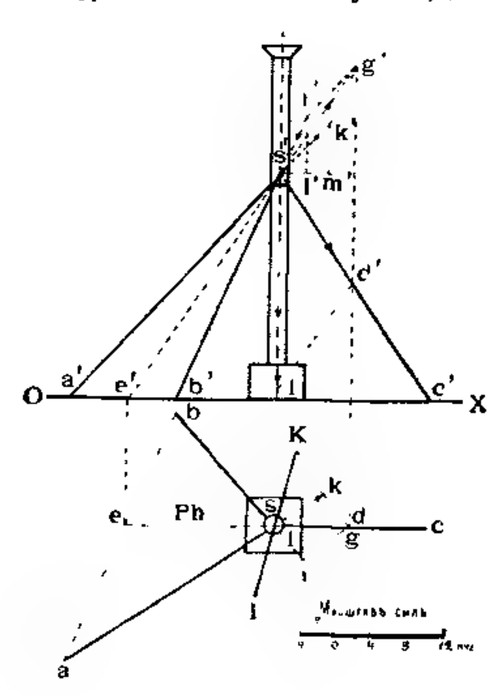
Очевидно, линія MN и будетъ являться линіей сѣченія данной плоскости съ вспомогательной $AFBG$. Точка же S пересѣченія линій MN и AB и будетъ искомой.

Пріемъ, показанный на черт. 114, примѣняется и для нахожденія линіи сѣченія двухъ плоскостей, каждая изъ которыхъ задана двумя пересѣкающимися или параллельными линіями. Для опредѣленія искомой линіи слѣдуетъ найти точки пересѣченія каждой изъ двухъ линій одной плоскости съ плоскостью двухъ другихъ и соединить полученныя точки прямой линіи, которая и будетъ искомой.

Вышеприведенныя разсужденія приводятъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема 13. Для опредѣленія въ пространствѣ точки пересѣченія прямой линіи съ плоскостью достаточно сдѣлать слѣдующія построенія: 1) провести черезъ прямую вспомогательную плоскость; 2) найти вспомогательную линію пересѣченія этой плоскости съ данной плоскостью. Точка пересѣченія вспомогательной прямой съ данной линіей и будетъ искомой.

Задача № 11. На чертежѣ 115 изображена въ ортогональныхъ проекціяхъ желѣзная фабричная труба *SF*, укрѣпленная тремя вантами *SA*, *SB*, *SC*. Динамометръ, поставленный на вантѣ *SC*, показалъ натяженіе ея въ 15 пудовъ. Опредѣлить натяженіе другихъ вантъ и величину силы, дѣйствующей вдоль оси трубы



Черт. 115.

Рѣшеніе. Задача сводится къ разложенію силы, дѣйствующей по линіи *SC*, на три направленія въ пространствѣ *SA*, *SB* и *SF*.

Проведемъ черезъ линію *SC* плоскость *P*, перпендикулярную къ *H*, и найдемъ линію *ES* сѣченія ея съ плоскостью вантъ *ASB*. Такъ какъ ванта *SC* параллельна *V*, то откладываемъ безъ искаженія на ней отрѣзокъ $SD = s'd'$, выражающій въ данномъ масштабѣ натяженіе ванты *SC* (15 пудовъ). Разлагаемъ теперь силу *SD* на два направленія—одно вдоль оси трубы, а другое вдоль линіи *SE*

Для этого проводимъ линіи *DE* и *DG*, соотвѣтственно параллельныя *SE* и *SF*, и замѣчаемъ точки *F* и *G* встрѣчи ихъ линіями *SF* и *SE*. Длина отрѣзка $s'f'$, проектирующагося на *V* безъ искаженія, выражаетъ величину силы, сжимающей трубу. Эта сила по масштабу равна 24 пудамъ.

Силу же *SG* разлагаемъ въ плоскости вантъ на два направленія вдоль *SB* и *SC*, для чего изъ *G* проводимъ линіи *GI* и *GK*, соотвѣтственно параллельныя *SA* и *SB*, до пересѣченія съ продолженіями послѣднихъ въ точкахъ *I* и *K*.

Отрѣзки *SI* и *SK* выражаютъ натяженіе въ вантахъ *SB* и *SA*. Остается опредѣлить истинныя величины этихъ отрѣзковъ, что нетрудно сдѣлать, припоминая теорему 4-ю (стр. 21).

Для опредѣленія истинной величины отрѣзка *SI* проводимъ $Ii \perp Si$ и откладываемъ $Ii = i'l'$ Длина отрѣзка *SI* выражается гипотенузой *SI* $\triangle$-ка *SIi* и по масштабу силъ даетъ натяженіе ванты *SB* равное 9 пуд. Подобнымъ же образомъ для опредѣленія натяженія ванты *SA* проводимъ $Kk \perp Sk$ и откладываемъ $Kk = k'm'$. Длина *Ks* выражаетъ натяженіе ванты *SA*, которое оказалось равнымъ также 9 пудамъ.

d) *Прямая линія, перпендикулярная къ плоскости.*

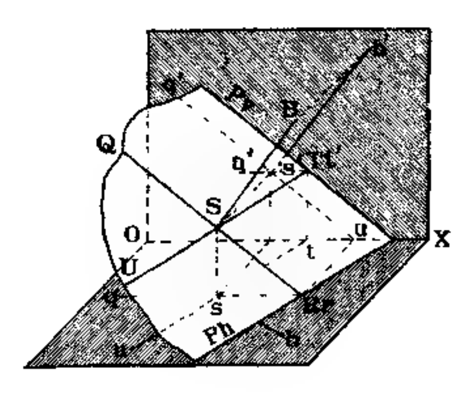
Линія, перпендикулярная къ плоскости, должна быть перпендикулярна по крайней мѣрѣ къ двумъ прямымъ, лежащимъ въ плоскости и не параллельнымъ другъ другу.

Докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 14. Если линія перпендикулярна къ плоскости, то проекціи этой линіи перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ слѣдамъ плоскости; вмѣстѣ съ тѣмъ горизонтальная проекція этой линіи $\perp$ къ горизонтальной проекціи горизонтали, а вертикальная проекція линіи $\perp$ къ вертикальной проекціи фронтали плоскости.

Доказательство. Пусть дана въ пространствѣ какая-нибудь плоскость P (черт. 116). Предположимъ, что изъ точки B, лежащей внѣ плоскости, проведенъ перпендикуляръ къ плоскости, пересѣкающей послѣднюю въ точкѣ S.

Проведемъ черезъ точку S въ плоскости P дѣ линіи горизонталь UT и фронталь QR. Очевидно, линія BS будетъ перпендикулярна къ UT и къ QB.



Черт. 116.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ въ пространствѣ даа прямыхъ угла BSU и BSQ, изъ которыхъ у каждаго одна сторона параллельна одной изъ плоскостей проекцій. Поэтому, на основаніи теоремы 9-й (стр. 33), уголь BSU спроектируется безъ искаженія на H, а уголъ BSQ спроектируется безъ искаженія на V. Имѣя же въ виду, что $SU \parallel Ph$ и $SQ \parallel Pv$, заключаемъ, что bs будетъ перпендикулярно Ph, а $b's'$ — перпендикулярно Pv, что и требовалось доказать въ первой части теоремы.

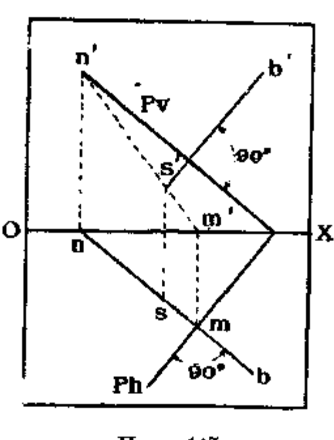
На черт. 117 показано въ проекціяхъ проведеніе перпендикуляра изъ точки B къ плоскости P. Точка S пересѣченія его съ P найдена такъ же, какъ это было уже объяснено ранѣе (черт. 112).

Если плоскость задана не слѣдами, а двумя пересѣкающимися линіями (черт. 118) и требуется изъ какой-нибудь точки B, находящейся внѣ плоскости, опустить на послѣднюю перпендикуляръ, то задачу можно свести къ предыдущей, построивъ слѣды данной плоскости, или же, что проще, построить въ данной плоскости линіи, параллельныя этимъ слѣдамъ, т. е. провести горизонталь BT и фронталь BQ, какъ это было уже показано ранѣе (черт. 92), а затѣмъ провести $ba \perp dt$ и $b'a' \perp d'q'$. Линія AB и будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Это построеніе объясняетъ вторую часть теоремы 14-й.

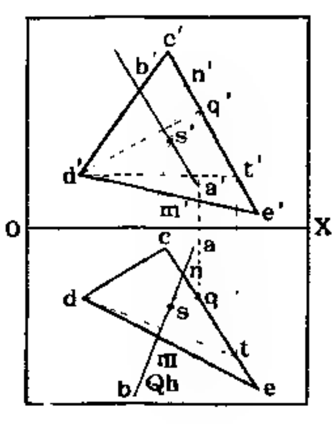
Точка S встрѣчи перпендикуляра съ плоскостью найдется по ранѣе приведеннымъ правиламъ (теорема 13, стр. 53) при помощи вспомогательныхъ: плоскости Q и линіи MN.

Изъ разсмотрѣнія различныхъ чертежей, гдѣ изображались плоскости, заданныя пересѣкающимися линіями (черт. 108, 110, 113, 114, 118),

видно, что при рѣшеніи задачъ осью проекцій пользоваться не приходилось, и достаточно было имѣть лишь обозначенія разныхъ точекъ проекцій фигуръ для того, чтобы знать направленіе оси OX, которая должна быть перпендикулярна къ линіямъ, соединяющимъ разноименныя проекціи одной и той же точки. Поэтому, часто въ нѣкоторыхъ курсахъ Начертательной Геометріи оси проекцій не прочерчиваютъ, имѣя въ виду, что ее всегда легко въ случаѣ надобности возстановить.



Черт. 117.



Черт. 118.

Мы, однако, оставляемъ эту ось на чертежѣ, такъ какъ она все же часто необходима при рѣшеніи разныхъ задачъ и, кромѣ того, является основной линіей, относительно которой оріентируются обѣ проекціи изображаемаго предмета, и которой обѣ эти проекціи раздѣляются

Задача № 12. На чертежѣ 119 изображенъ въ ортогональныхъ проекціяхъ передній руль высоты аэроплана. Руль состоитъ изъ деревянной рамы $ABCD$, растянутой проволочными стяжками AC и BD. Рама обшивается матеріей, на чертежѣ не показанной. Руль можетъ вращаться вокругъ горизонтальной оси FG, подшипники которой помѣщаются въ углу стрѣлъ HF, IF, и KG, LG, идущихъ къ корпусу аэроплана. Для того, чтобы поворачивать руль вокругъ оси GF, необходимо въ центрѣ его E укрѣпить на оси GF металлическій стержень MN, перпендикулярный къ рамѣ. Къ концамъ этого стержня прикрѣпляются стальные тросы, идущіе къ штурвалу, управляемому пилотомъ изъ гондолы аэроплана.

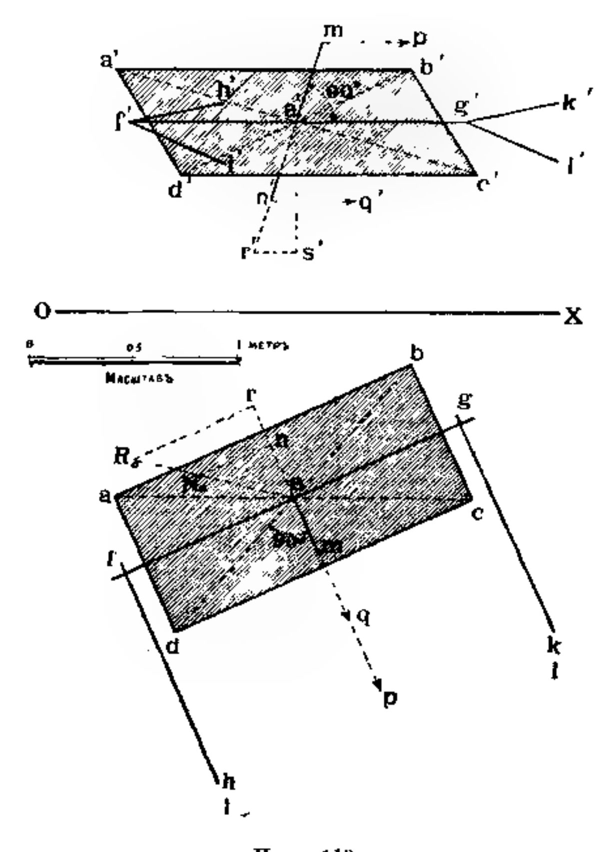
Требуется показать на чертежѣ проекціи стержня MN, имѣя въ виду, что истинная длина его должна быть 1 метръ, и прикрѣпляется онъ къ оси GF своей серединой.

Рѣшеніе. Разсматривая чертежъ 119, видимъ, что линіи DC и AB являются горизонталями плоскости руля, а діагональ AC—фронталью той же плоскости. Поэтому на основаніи теоремы 14-й (стр. 55), проводимъ черезъ точку e линію $nm \perp dc$, а черезъ точку e'—линію $n'm' \perp a'c'$ и принимаемъ NM за ось искомаго стержня. Теперь найденъ проекцію его концовъ, зная, что длина его должна равняться 1 метру.

Зададимся на линіи NM какой-нибудь точкой R и опредѣлимъ, пользуясь тео-

ремой 4 й (стр. 21) длину отрѣзка RE, которая выражается гипотенузой R_0e прямоугольнаго треугольника R_0re, катетъ котораго R_0r равенъ $e's'$

Отложимъ теперь на гипотенузѣ eR_0 отъ точки e отрѣзокъ eN_0, равный 0,5 метр., и проведемъ $N_0n \parallel R_0r$ до пересѣченія съ rm въ точкѣ n. Эта точка и будетъ проекціей конца стержня. Далѣе откладываемъ $em = en$ и находимъ проекціи n' и m'. На чертежѣ показаны также части тросовъ MP и NQ, идущихъ отъ концовъ стержня NM къ штурвалу.



Черт. 119.

---

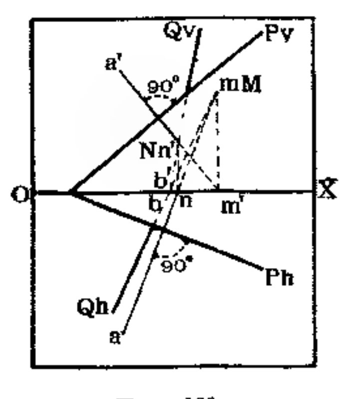
§ 7. Плоскости взаимно перпендикулярныя или параллельныя.

Если одна плоскость перпендикулярна къ другой, то первая должна заключать въ себѣ линію, перпендикулярную ко второй. Поэтому, для проведенія какой нибудь плоскости, перпендикулярной къ данной плоскости, достаточно провести какую-нибудь линію, перпендикулярную къ данной плоскости, и черезъ эту линію провести какую-нибудь плоскость, которая и будетъ искомой.

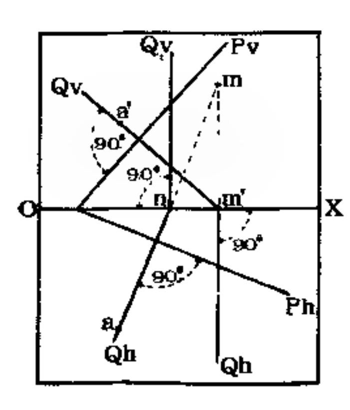
На черт. 120 показано въ проекціяхъ проведеніе плоскости Q, перпендикулярной къ данной плоскости P.

Плоскость P задана слѣдами Pv и Ph, кромѣ того, дана точка A (a, a') черезъ которую требуется провести плоскость Q, перпендикулярную къ P. Проводимъ черезъ A линію AM, перпендикулярную къ P. Согласно теоремѣ 14 (стр. 55) должно быть $a'm' \perp Pv$ и $am \perp Ph$.

По теоремѣ 5-й (стр. 22) находимъ слѣдъ линіи AM, именно, горизонтальный M ($m'm$), лежащій на задней полѣ H и вертикальный N (n, n'). Проводимъ теперь черезъ точку M (m) случайную линію Qh, которую и принимаемъ за горизонтальный слѣдъ искомой плоскости.



Черт. 120.



Черт. 121.

Вертикальный слѣдъ Qv ея долженъ проходить черезъ точку B (b, b') схода слѣдовъ и черезъ точку N (n, n'). Плоскость Q потому заключаетъ въ себѣ линію AM, что слѣды линіи M и N лежать на слѣдахъ плоскости.

Если бы плоскость P была задана не слѣдами, а двумя случайными линіями, то ходъ рѣшенія задачи остается тотъ же самый, только сначала необходимо найти горизонталь и фронталь заданной плоскости, какъ это объяснено ранѣе на черт. 118.

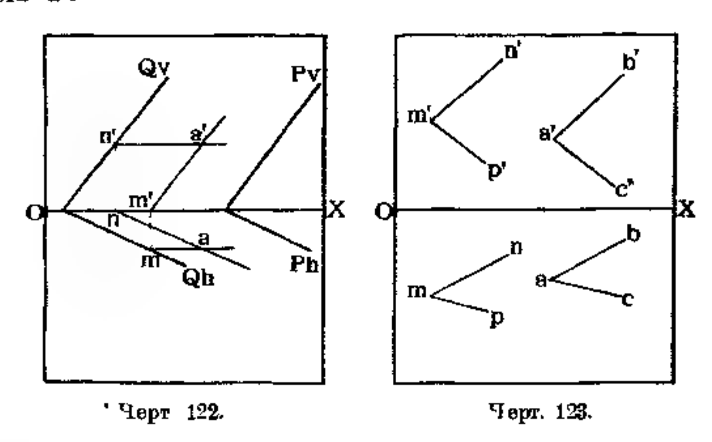
Въ частномъ случаѣ можно одинъ изъ слѣдовъ Qv или Qh (черт. 120) провести перпендикулярно къ оси OX; тогда и плоскость Q, будучи перпендикулярной къ P, расположится перпендикулярно къ одной изъ плоскостей проекціи. Напримѣръ, на черт. 121 изображены двѣ проходящія черезъ точку A плоскости: Q, перпендикулярная къ P и къ V, и плоскость Q_1, перпендикулярная къ P и къ H.

Если даны: плоскость и точка внѣ ея, и черезъ точку требуется провести плоскость, параллельную данной, то для этого достаточно черезъ точку провести двѣ линіи, параллельныя двумъ какимъ-нибудь пересѣ-

кающимся линіямъ, лежащимъ въ данной плоскости. Новыя линіи и опредѣляютъ искомую плоскость.

На черт. 122 даны: точка A и плоскость P. Проводимъ черезъ A двѣ линіи: одну AM, параллельную Pv ($a'm' \parallel Pv$ и $am \parallel OX$), и другую AN, параллельную Ph ($an \parallel Ph$ и $a'n' \parallel XO$).

Плоскость, опредѣляемая линіями AN и AM, будетъ параллельна плоскости P.



Черт 122. Черт. 123.

Если бы мы построили слѣды этой плоскости, то увидѣли бы, что $Qh \parallel Ph$ и $Qv \parallel Pv$.

Если плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями MN и MP (чер. 123), то для проведенія черезъ точку A плоскости, параллельной MNP, проведемъ черезъ A линіи $AB \parallel MN$ и $AC \parallel MP$. Плоскость ABC и будетъ искомой.

Задача 13. На чертежѣ 124 изображено наклонное прямоугольное зеркало, и показана свѣтящаяся точка S (s, s'). Въ точкѣ M (m, m') помѣщается глазъ человѣка. Опредѣлить на зеркалѣ точку, въ которой отразится отъ послѣдняго лучъ, идущій изъ S и попадающій въ точку M.

Рѣшеніе. Изъ физики извѣстно, что если лучъ SN (черт. 125) падаетъ въ точкѣ N на зеркало Q и отражается отъ него по направленію NM, то уголъ SNB паденія долженъ быть равенъ углу MNB отраженія, при чемъ линія BN является перпендикуляромъ къ зеркалу въ точкѣ N.

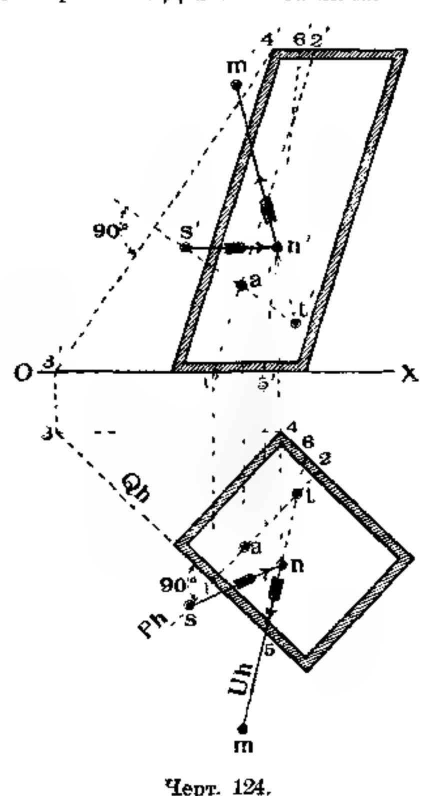
Для рѣшенія задачи въ пространствѣ проводимъ черезъ точку S линію ST, перпендикулярную къ зеркалу. Пусть эта линія пересѣчетъ зеркало въ точкѣ A. Откладываемъ $TA = SA$ и соединяемъ T съ M. Линія TM пересѣчетъ зеркало въ искомой точкѣ N, такъ какъ въ плоскости SMT перпендикулярной къ Q, мы имѣемъ углы:

$$NST = STN = a - BNM = BNS.$$

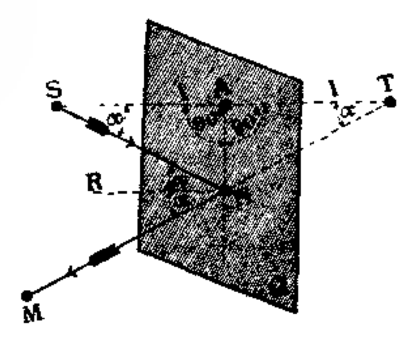
Въ проекціяхъ задача рѣшается слѣдующимъ образомъ (черт. 124): проводимъ въ плоскости Q фронталь $3'4'$, 34 и замѣчаемъ горизонтальный слѣдъ зеркала Qh.

Опускаемъ изъ точки S перпендикуляръ къ зеркалу, для чего проводимъ $st \perp Qh$ и $s't' \perp 3'4'$ (теорема 14-я стр. 55). Находимъ пересѣченіе A этого перпендикуляра

съ зерваломъ. Для этого заключаемъ линію *ST* въ плоскость *P*, перпендикулярную къ *H*, и находимъ линію 1 2, 1' 2' сѣченія плоскостей *P* и *Q*. Точка *a'* пересѣченія линій 1' 2' и *s't'* опредѣлитъ вертикальную проекцію точки *A*, горизонтальная—*a* будетъ лежать на линіи *st*. Далѣе, намъ слѣдуетъ отложить въ пространствѣ *TA* = *SA*. На основаніи теоремы 6 (стр. 26) откладываемъ *ta*=*sa* и *t'a'* = *s'a'*. Соединяемъ точки *m* съ *t* и *m'* съ *t'* и находимъ точку *N* (*n'*, *n*) пересѣченія линіи *MT* съ плоскостью *Q*, для чего проводимъ черезъ *MT* вспо-



Черт. 124.



Черт. 125.

могательную плоскость *U*, которая пересѣкается съ *Q* по линіи 5'6', 56. Точка *N* опредѣляется пересѣченіемъ линіи 56 и *M*.

---

§ 8. Опредѣленіе видимости геометрическихъ элементовъ.

Для наглядности изображенія въ ортогональныхъ проекціяхъ принято отдѣлять видимыя части геометрическихъ элементовъ отъ невидимыхъ, вычерчивая проекціи видимыхъ линій сплошной чертой, а невидимыхъ—пунктиромъ.

При опредѣленіи видимости частей предполагается, что какъ плоскости проекцій, такъ и всякія другія—непрозрачны, такъ что, если такая плоскость находится между глазомъ наблюдателя и разсматриваемой линіей, то послѣдняя считается невидимой, и потому проекція ея должна быть вычерчена пунктиромъ.

Такъ какъ въ ортогональныхъ проекціяхъ мы имѣемъ дѣло съ двумя прямоугольными проекціями предметовъ на *V* и *H*, то слѣдуетъ отдѣльно опредѣлять видимость частей въ каждомъ изображеніи, при чемъ, въ виду

параллельности проектирующихъ лучей, предполагаются точки зрѣнія безконечно удаленными.

При разсматриваніи горизонтальной проекціи предполагается, что лучи идутъ отъ безконечно удаленной точки $C_{1\infty}$ и перпендикулярны къ H (чер. 126). Если лучъ встрѣтитъ какую нибудь точку M раньше, нежели непрозрачную плоскость S, то точка M будетъ видима относительно S; если же лучъ сначала пересѣчетъ плоскость въ какой-нибудь точкѣ N, а потомъ уже пройдетъ черезъ разсматриваемую точку M_1, то послѣдняя будетъ невидима.

Точно также при направленіи лучей зрѣнія, перпендикулярномъ къ V, точка P будетъ видима, если лучъ $C_{2\infty}P$ сначала встрѣтитъ точку P, а потомъ уже плоскость S. Если же точка Q пересѣченія луча съ плоскостью встрѣтится раньше разсматриваемой точки P_1, то послѣдняя будетъ невидима. Если плоскость ограничена, то одна и та же точка, напримѣръ, P_1 можетъ быть видима, если смотрѣть на H, и невидима, если смотрѣть на V и наоборотъ. Наконецъ, точка можетъ быть при обоихъ направленіяхъ лучей зрѣнія видимой, какъ P, или невидимой, какъ M_1.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что видимость любой точки относительно плоскости опредѣляется сравненіемъ разстоянія этой точки до плоскости проекцій съ разстояніемъ до той же плоскости проекціи точки встрѣчи луча съ разсматриваемой плоскостью, именно (черт. 126), если:

$Mn > Nn$,	то	точка	M	видима,	если	смотрѣть	на	H.
$M_1n < Nn$,	»	»	M_1	невидима,	»	»	»	H.
$Pq' > Qq'$,	»	»	P	видима,	»	»	»	V.
$P_1q' < Qq'$,	»	»	P_1	невидима,	»	»	»	V.

Длины этихъ отрѣзковъ, измѣряемыя вдоль линій параллельныхъ H или V, проектируются на H или на V безъ искаженія. Поэтому, если мы въ проекціяхъ опредѣлимъ точки N или Q пересѣченія лучей съ плоскостью и сравнимъ разстоянія проекцій точекъ N или Q отъ оси съ разстояніями проекцій отъ той же оси данной точки, то можемъ опредѣлить и видимость точекъ, напримѣръ (черт. 126) если:

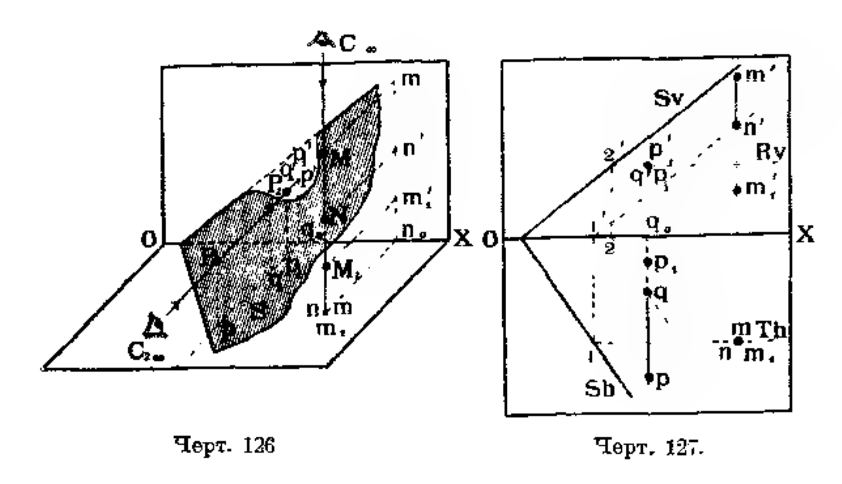
$m'n_0 > n'n_0$,	то	точка	M	видима,	если	смотрѣть	на	H.
$m_1'n_0 < n'n_0$,	»	»	M_1	невидима,	»	»	»	H.
$pq_0 > qq_0$,	»	»	P	видима,	»	»	»	V.
$p_1q_0 < qq_0$,	»	»	P_1	невидима,	»	»	»	V.

На чертежѣ 127 та же задача рѣшена въ проекціяхъ. Дана плоскость S и точки M, M_1, P и P_1. Для опредѣленія точки встрѣчи съ S луча,

проходящаго черезъ точки M, M_1 и перпендикулярнаго къ H, проведемъ черезъ него плоскость T, параллельную V, и найдемъ, какъ было ранѣе сказано (стр. 48) линію (фронталь) $1n$, $1'n'$ сѣченія T съ S. Точка N пересѣченія линій $1N$ и MM_1 и будетъ точкой пересѣченія луча съ S; такъ какъ m' дальше отстоитъ отъ OX, нежели n', то точка M будетъ видима, если смотрѣть на H.

Точка же M_1 будетъ невидима, если смотрѣть на H, такъ какъ m_1' ближе къ OX, нежели n'.

Для опредѣленія видимости точекъ P и P_1, если смотрѣть на V, проводимъ черезъ нихъ лучъ, перпендикулярный къ V, и находимъ пересѣченіе его съ S. Для этого лучъ заключаемъ въ плоскость R, парал-



Черт. 126 Черт. 127.

лельную H, и находимъ линію (горизонталь) $2Q$ сѣченія плоскостей S и R; искомая точка Q опредѣлится какъ точка встрѣчи линій PP_1 и $2Q$.

Такъ какъ $p\,q_0 > q\,q_0$, то точка P будетъ видима, если смотрѣть на V; точка же P_1 будетъ невидима, такъ какъ $p_1q_0 < q\,q_0$.

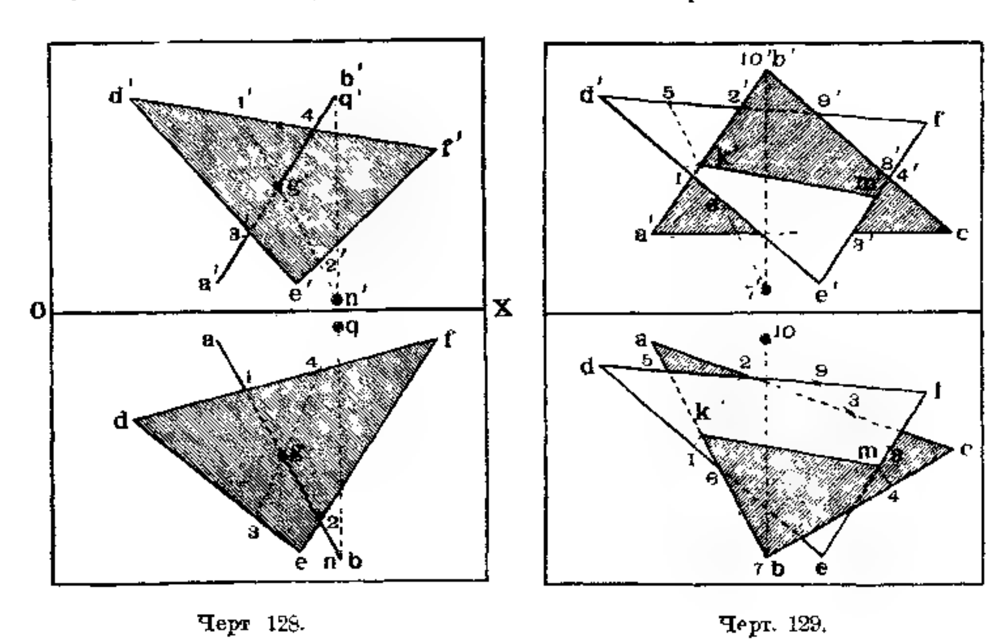
Разсмотримъ теперь опредѣленія видимости отрѣзка прямой линій AB (черт. 128) относительно плоскости, при чемъ послѣднюю будемъ предполагать ограниченной и заданной въ видѣ треугольника DEF.

Найдемъ сначала по общему правилу (теорема 13, стр. 53) точку G пересѣченія AB съ DEF, для чего служить вспомогательная линія (12, $1'2'$) сѣченія DEF съ плоскостью, проектирующей AB на H. Точка G будетъ служить границей видимости прямой AB въ каждой проекціи. Опредѣлимъ, будетъ ли видима точка B, если смотрѣть ва H.

Согласно вышеизложенному способу (черт. 127) проводимъ черезъ E лучъ, перпендикулярный къ H, и находимъ точку N пересѣченія его съ DEE (вспомогательная линія **1,2**). Точка N оказалась ниже B, поэтому D будетъ видна, если смотрѣть на H и, слѣдовательно, часть bg гори-

зонтальной проекціи ab слѣдуетъ вычертить сплошной чертой, часть же ag отъ точки g до контура треугольника dfe необходимо чертить пунктиромъ, наконецъ, отрѣзокъ $a1$ также вычерчиваетсл сплошной чертой, такъ какъ треугольникъ, будучи ограниченъ, не закроетъ точки a.

Подобнымъ же образомъ опредѣляемъ видимость точки B въ проекціи на V, для чего проводимъ черезъ B лучъ, перпендикулярный къ V. Лучъ этотъ пересѣкаетъ плоскость BEF въ точкѣ Q (вспомогательная линія 34, $3'4'$), которал ближе къ V, нежели точка B, поэтому точка B будетъ видима, и отрѣзокъ $b'g'$ долженъ быть вычерченъ сплошной линіей.



Черт 128. Черт. 129.

Отрѣзокъ AG будетъ лежать сзади плоскости DEF и часть его проекціи отъ точки g до контура треугольника будетъ вычерчена пунктиромъ.

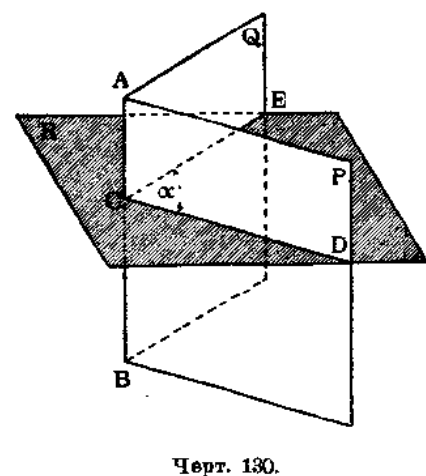
Рѣшимъ теперь задачу на опредѣленіе видимости частей двухъ пересѣкающихся треугольниковъ (черт. 129).

Находимъ сначала обычнымъ способомъ линію KM ихъ сѣченія, для чего служатъ вспомогательныя линіи **12** и **34**. Опредѣлимъ теперь видимость точки B треугольника ABC относительно H. Опускаемъ изъ B перепендикуляръ къ H и находимъ, какъ ранѣе было объяснено, точку **7** пересѣченія его съ плоскостью треугольника DEF, для чего служитъ вспомогательная линія **56**. Такъ какъ точка **7** лежитъ ниже B, то, слѣдовательно, B видима, если смотрѣть на H. Поэтому часть $MKBC$ треугольника ABC будетъ видима. Проведемъ теперь черезъ B

лучъ, перпендикулярный къ V, и найдемъ точку **10** пересѣченія его съ плоскостью треугольника DEF. Такъ какъ точка **10** лежитъ ближе къ V нежели точка B, то послѣдняя будетъ видна, если смотрѣть на V, а, слѣдовательно, будетъ видна и часть $MKBC$ треугольника ABC. На чертежѣ 129 проекціи видимыхъ частей треугольника ABC заштрихованы. Замѣтимъ, что въ каждой проекціи части одного треугольника, лежащія внѣ контура другого, будутъ видимы Кромѣ того, всегда видимыми будутъ линіи общаго контура всѣхъ фигуръ каждой проекціи.

§ 9. Изображеніе многогранниковъ.

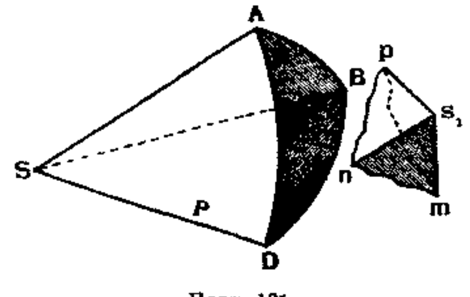
Напомнимъ здѣсь нѣкоторыя положенія изъ элементарной геометріи. Если имѣются въ пространствѣ двѣ плоскости P и Q (черт. 130), пересѣкающіяся между собою по линіи AB, то эти плоскости образуютъ *двугранный уголъ* при ребрѣ AB.



Черт. 130.

Мѣрою этого двуграннаго угла служитъ линейный уголъ DCE α, образованный линіями сѣченія сторонъ или граней угла P и Q съ плоскостью B, перпендикулярной къ ребру AB.

Если въ какой нибудь точкѣ S пространства будетъ пересѣкаться болѣе двухъ плоскостей, но между послѣдними образуется *пространственный или тѣлесный уголъ*, который называется треграннымъ, четырегранныимъ и т. д. въ зависимости отъ чисяа плоскихъ граней, пересѣкающихся въ его вершинѣ S.



Черт. 131.

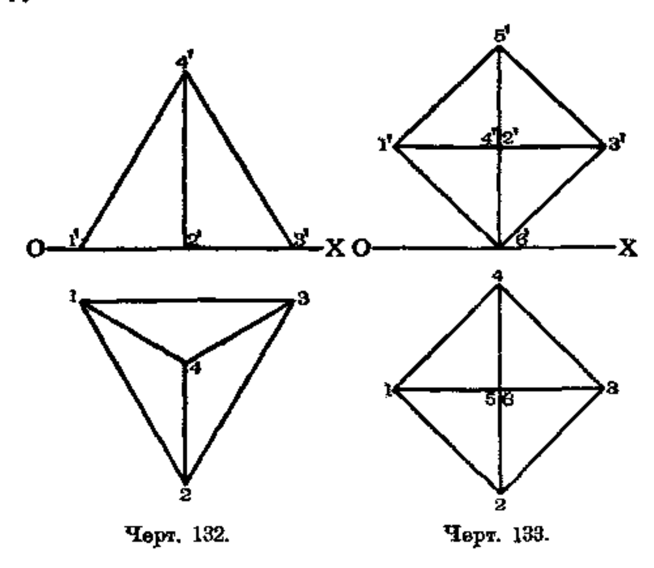
Напримѣръ, на черт. 131 показанъ трегранный уголъ $ABBS$ съ вершиной въ S.

Тѣлесные углы измѣряются слѣдующимъ образомъ:

Опишемъ изъ вершины S угла, какъ изъ центра, шаръ радіуса, равнымъ единицѣ длины, и пусть поверхность этого шара пересѣчетъ ребра тѣлеснаго угла въ точкахъ A, B и D. Очевидно,

каждая грань пересѣчетъ поверхность шара по дугамъ AB, DD, DA большихъ круговъ, ограничикающихъ на шарѣ нѣкоторую площадь ABD.

За единицу тѣлеснаго угла принимается такой уголъ, для котораго площадь, отсѣкаемая его гранями на упомянутомъ шарѣ, равна единицѣ площади. Напримѣръ, если радіусъ шара равнялся 1 метру, то единица площади, соотвѣтствующая единицѣ тѣлеснаго угла, будетъ равняться 1 кв. метру.



Черт. 132. Черт. 133.

Выберемъ теперь въ пространствѣ (черт. 131) случайную точку s, и опустимъ изъ нея перпендикуляры s_1u, s_1m и s,p на грани P, Q, R, или на ихъ продолженія.

Между этими перпендикулярами образуется новый тѣлесный уголъ s_1nmp, который называется *дополнительнымъ* или *полярнымъ* данному $SADD$.

Нѣсколько плоскостей, пересѣкаясь между собой по прямымъ линіямъ, образуютъ поверхность, называемую *многогранной*. Если же плоскости при этомъ замыкаютъ пространство со всѣхъ сторонъ, то онѣ образуютъ *многогранникъ*.

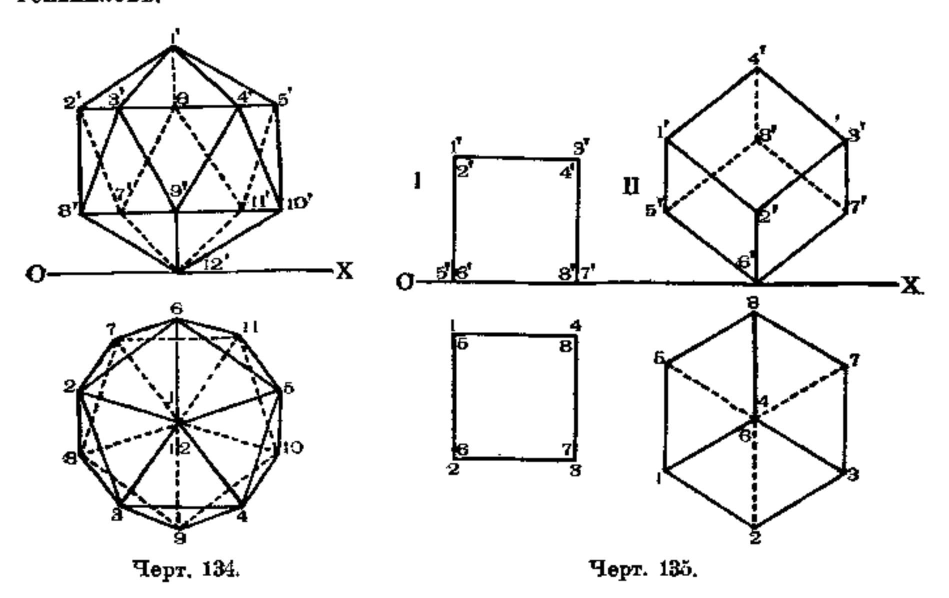
Среди различнаго рода многогранниковъ выдѣляютъ въ особую группу *правильные многогранники*, у каждаго изъ которыхъ равны между собою: асѣ ребра, стороны, плоскіе, двугранные и тѣлесные углы.

Сущестауетъ пять правильныхъ многогранниковъ:

1) *Тетраедръ*, образованный изъ четырехъ равностороннихъ треугольниковъ.

2) *Октаедръ*, образованный изъ восьми равностороннихъ треугольниковъ.

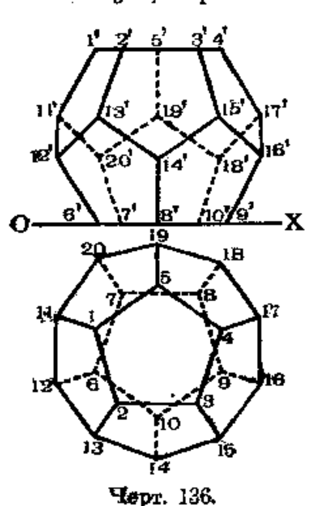
3) *Икосаедръ*, образованный изъ двадцати равностороннихъ треугольниковъ.



Черт. 134.

Черт. 135.

4) *Кубъ*, образованный изъ шести квадратовъ.



Черт. 136.

5) *Додекаедръ*, образованный изъ двѣнадцати правильныхъ пятиугольниковъ.

Для изображенія многогранника въ ортогональныхъ проекціяхъ достаточно знать проекціи его вершинъ. Соединяя соотвѣтственнымъ образомъ проекціи вершинъ прямыми линіями, можно получить очертанія проекціи многогранника на каждой изъ плоскостей проекцій.

Не входя пока въ подробности того, какъ опредѣляются положенія вершинъ правильныхъ многогранниковъ, приведемъ здѣсь лишь изображенія:

тетраэдра—черт. 132,
октаэдра — черт. 133,
икосаэдра—черт. 134,

куба въ двухъ положеніяхъ: лежащаго гранью на H и стоящаго вершиной на *И*, при чемъ діагональ 46 перпендикулярна къ H (чертежъ 135),

додекаэдра—черт. 136.

Въ нижеслѣдующей табличкѣ показаны для каждаго изъ правильныхъ многогранниковъ:

число граней F;

» вершинъ S;

» реберъ A;

» сторонъ фигуры каждой грани n;

» реберъ, сходящихся въ каждой вершинѣ, m.

	F	S	A	n	m
Тетраэдръ.	4	4	6	3	3
Кубъ	6	8	12	4	3
Октаэдръ	8	6	12	3	4
Додекаэдръ	12	20	30	5	3
Икосаэдръ.	20	12	30	3	5

Разсматривая эту табличку, можно замѣтить слѣдующее соотношеніе между кубомъ и октаэдромъ: для нихъ числа A одинаковы, числа же F и S одинаковы накрестъ, такъ же какъ и числа n и m. Благодаря такому свойству, эти многогранники называютъ *взаимными*.

Додекаэдръ и икосаэдръ также являются взаимными многогранниками. Тетраэдръ является взаимнымъ самому себѣ [1]).

Въ видѣ примѣра на чертежахъ 137 и 138 изображено нѣсколько неправильныхъ многогранниковъ, именно, на черт. 137 двѣ пирамиды, изъ которыхъ одна четырегранная съ основаніемъ $ABCD$, другая трегранная, наклонная, съ основаніемъ ABC.

На черт. 138 изображены: слѣва, прямая шестигранная призма, а справа, наклонная трегранная призма.

При вычерчиваніи проекцій призмъ, у которыхъ имѣется рядъ взаимно параллельныхъ реберъ, не слѣдуетъ забывать, что одноименныя проекціи такихъ реберъ также будутъ параллельны другъ другу.

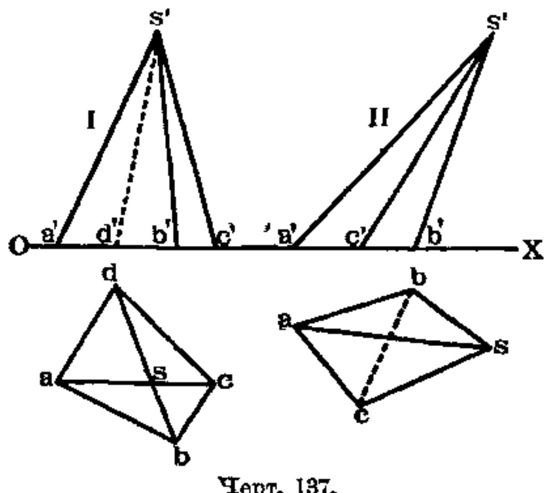
На чертежѣ 139 изображенъ еще одинъ многогранникъ, называемый *призматоидомъ* и находящій себѣ примѣненіе въ желѣзнодорожномъ дѣлѣ

---

[1]) Подробности о взаимныхъ многогранникахъ этихъ и другихъ, см. B. Briсard „Géométrie Descriptive". Paris 1911 pg. 54 и Ch. Wiener „Lehrbuch der Darstellenden Geometrie". Bd. I, Leipzig 1884 st. 142.

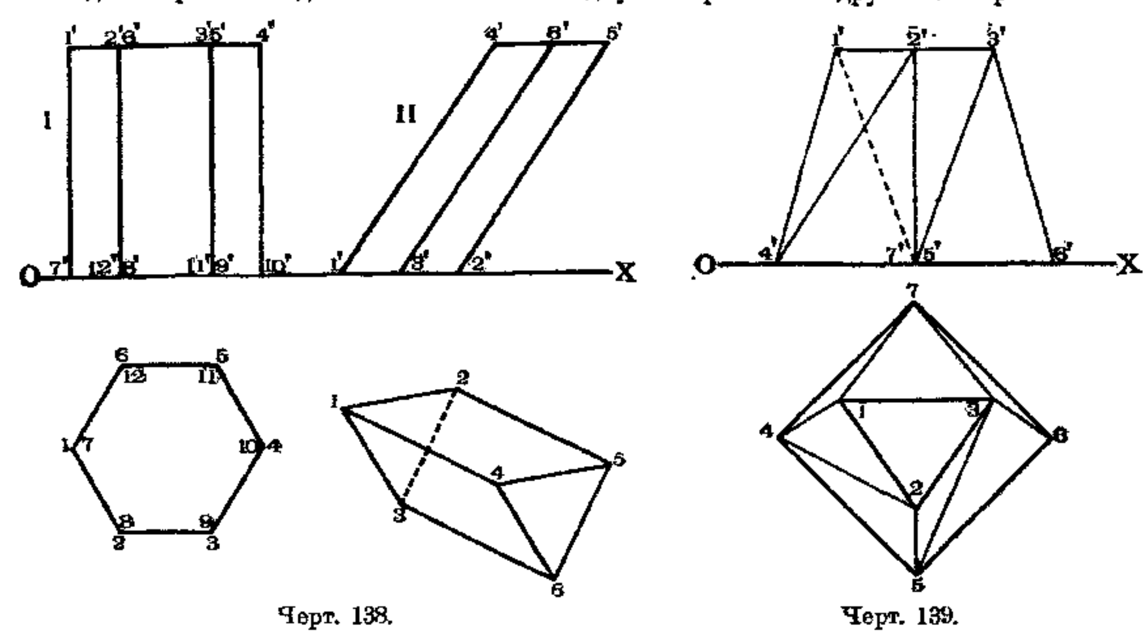
при подсчетѣ земляныхъ работъ насыпей и выемокъ желѣзнодорожнаго полотна.

Призматоидъ ограниченъ двумя параллельными основаніями, которыя могутъ быть и съ неодинаковымъ числомъ сторонъ, и рядомъ треуголь-



Черт. 137.

ныхъ боковыхъ граней, которыя получаются при помощи соединенія каждой вершины одного основанія съ двумя вершинами другого. Призма-

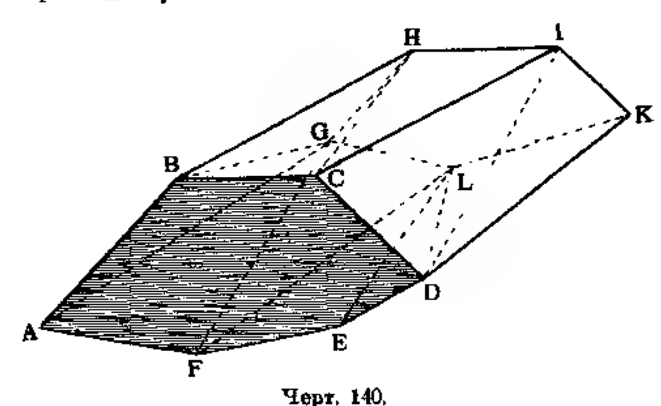


Черт. 138. Черт. 139.

тоидъ, изображенный на черт. 139, имѣетъ верхнее основаніе въ видѣ треугольника **123**, а нижнее—въ видѣ квадрата **4567**. Боковую его поверхность составляютъ семь треугольныхъ граней.

На черт. 140 показана часть насыпи желѣзной дороги. Полотно ея *BCIH*, откосы *CBIK* и *ABHG*.

Линіи $AFED$ и GLK—очертанія грунтовой земли въ началѣ и въ концѣ насыпи. Насыпь разсѣчена двумя параллельными сѣченіями $ABCDEF$ и $HIKLG$, изъ которыхъ первое получилось шестиугольнымъ, а второе—пятиугольнымъ.



Черт. 140.

Соединяемъ каждую вершину сѣченія $HIKLG$ съ вершинами другого такъ, чтобы получить рядъ треугольниковъ. Полученное тѣло и будетъ имѣть видъ призматоида [1]).

Такъ какъ объемъ призматоида опредѣляется легко, то потому онъ и примѣняется для подсчета объема земли въ насыпяхъ и въ выемкахъ.

---

§ 10. Вращеніе.

а) *Общія понятія.*

Ранѣе было упомянуто (теорема 9, стр. 33), что уголъ между линіями проектируется безъ искаженія, когда плоскость угла параллельна плоскости проекціи. При этомъ и всякая фигура, лежащая въ такой плоскости, параллельной плоскости проекцій, будетъ проектироваться на эту плоскость проекцій безъ искаженія, т. е. проектируются въ натуральную величину длины линій, площади и углы.

Такъ какъ часто плоскость, въ которой лежать опрздѣляемые геонетрическіе элементы, бываетъ расположена не параллельно на одной изъ плоскостей проекцій, то, очевидно, является цѣлесообразнымъ при помощи тѣхъ или иныхъ геометрическихъ дѣйствій достичь такого выгоднаго раеположенія.

Въ ортогональныхъ проекціяхъ дла этого служатъ два метода: *вращеніе и перемѣна плоскостей проекцій.*

Разсмотримъ послѣдовательно оба эта метода.

---

[1]) Замѣтимъ, что треугольники CDI и DIK, равно какъ и треугольники ABG и BGH, попарно лежатъ въ одной плоскости.

Методъ вращенія заключается въ томъ, что данную геометрическую фигуру вращаютъ въ пространствѣ вокругъ нѣкоторой оси до тѣхъ поръ, пока она не займетъ выгоднаго положенія относительно плоскости проекцій.

При этомъ всѣ точки вращаемой фигуры будутъ описывать въ пространствѣ дуги круговъ, центры которыхъ располагаются на оси вращенія, а плоскости которыхъ будутъ перпендикулярны къ оси вращенія.

Если ось вращенія выбрана случайной и не перпендикулярной ни къ V ни къ H, то и упомянутые круги вращенія не будутъ параллельными ни V ни H и, слѣдовательно, спроектируются на V и на H въ видѣ эллипсовъ. Тавъ какъ построеніе эллипсовъ затруднительно, то поэтому избѣгаютъ выбирать оси вращенія случайнымъ образомъ, а выбираютъ ихъ преимущественно перпендикулярными къ V или къ H.

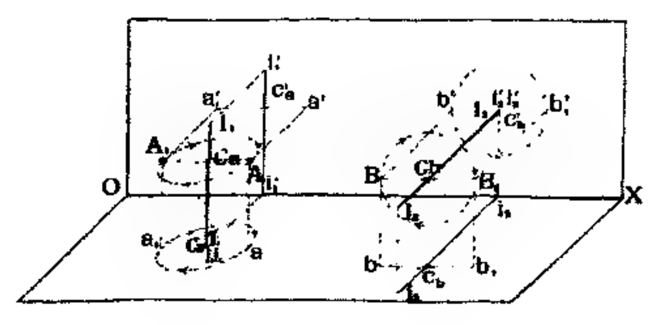
Ось вращенія принято обозначать въ пространствѣ большими буквами II, а ея проекцію—малыми буквами ii и $i'i'$, при чемъ, если приходится пользоваться нѣсколькими осями, то ихъ нумеруютъ по порядку, прибавляя къ буквамъ I значекъ внизу справа.

Разсмотримъ послѣдовательно, какъ отражаются въ проекціяхъ вращеніе точекъ, линій, плоскостей и пространственныхъ тѣлъ сначала вокругъ одной оси, перпендикулярной къ H или къ V, а затѣмъ и послѣдовательное вращеніе вокругъ двухъ такихъ же осей.

b) *Вращеніе вокругъ одной оси, перпендикулярной къ H или къ V.*

α) Вращеніе точки.

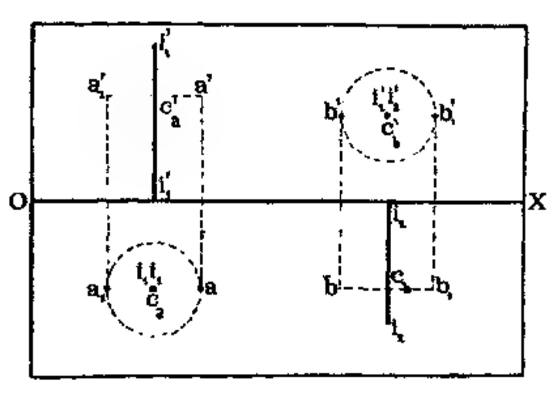
Пусть дана въ пространствѣ ось вращенія I_1I_1, перпендикулярная къ H (черт. 141 и 142 слѣва), и точка A, которая описываетъ вокругъ I_1I_1 полный кругъ съ центромъ C_a.



Черт. 141.

При такихъ условіяхъ кругъ вращенія точки A спроектируется на H безъ искаженія въ видѣ круга же, а на V въ видѣ прямой, паркллельнй оси OX.

Если же ось $I_2 I_2$ выбрана перпендикулярной къ V (черт. 141 и 142 справа), то кругъ вращенія какой-нибудь точки B спроектируется на V безъ искаженія въ видѣ круга же, а на H—въ видѣ прямой, параллельной OX.



Черт. 142.

Центръ C_a вращенія точки A спроектируется на H въ центрѣ круга вращенія проекціи a точки A, а на V расположится на вертикальной проекціи $i_2'i_2'$ оси вращенія на высотѣ точки A.

Аналогично расположится и центръ C_b вращенія точки B.

Изъ вышеизложеннаго вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема 15. При вращеніи точки вокругъ оси, перпендикулярной къ H (къ V), горизонтальная (вертикальная) проекція точки описываетъ кругъ съ центромъ въ горизонтальной (вертикальной) проекціи оси вращенія, а вертикальная (горизонтальная) проекція точки двигается по линіи, параллельной оси OX.

Слова въ скобкахъ относятся къ случаю, когда ось вращенія перпендикулярна къ V.

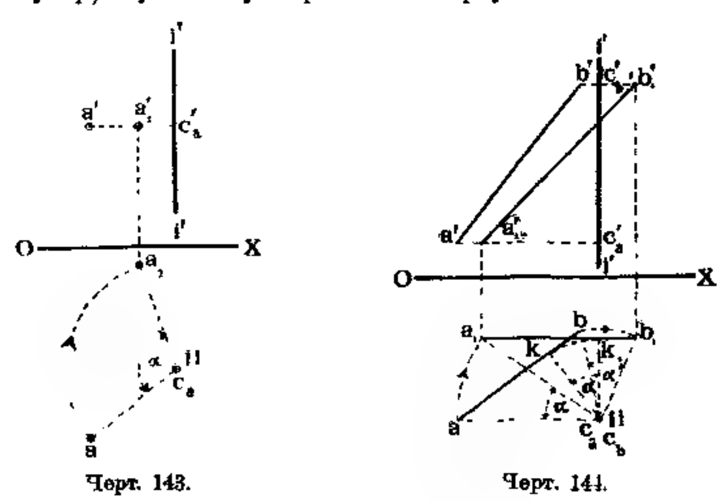
Въ дальнѣйшемъ, въ виду полной аналогіи построеній при вращеніи вокругъ осей, перпендикулярныхъ къ V, съ построеніями при вращеніи вокругъ осей, перпендикулярныхъ къ H, мы будемъ примѣнять лишь послѣднія, имѣя въ виду, что въ случаѣ, если представится необходимость имѣть дѣло съ осью, перпендикулярной къ V, то всѣ построенія, произведенныя ранѣе на H, должны теперь повторены на V, а бывшіе на V—повторены на H.

Рѣшимъ слѣдующую задачу на вращеніе точки:

Дана точка A, уголъ α и ось вращенія $II \perp H$. Повернуть точку A вокругъ II по направленію движенія часовой стрѣлки на уголъ α (чертежъ 143).

Для рѣшенія задачи соединяемъ точку a съ ii. Съ точкою ii совпа-

даетъ и c_a, горизонтальная проекція центра C_a вращенія точки A. При вращеніи точки ея горизонтальная проекція a опишетъ дугу круга въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, и придетъ въ положеніе a_1, подчиненное условію, чтобы уголъ ac_aa_1 равнялся данному углу α. Вертикальная проекція точки въ это время будетъ двигаться по линіи, перпендикулярной къ $i'i'$, или, что то же, по линіи $a'c_a'$, параллельной оси OX. Проведя изъ a_1 перпендикуляръ къ OX до пересѣченія съ $a'c_a'$, получимъ точку a_1', вертикальную проекцію повернутой точки.



Черт. 143. Черт. 144.

Условимся въ дальнѣйшемъ проекціи повернутыхъ точекъ обозначать малыми буквами со значкомъ справа внизу.

β) Вращеніе прямой линіи.

Разсмотримъ вращеніе прямой линіи въ примѣрѣ рѣшенія слѣдующей задачи.

Дана прямая линія AB (черт. 144). Опредѣлить истинную длину ея, пользуясь методомъ вращенія.

Выберемъ ось вращенія II, перпендикулярную H, и будемъ вращать AB вокругъ II до тѣхъ поръ, пока AB не станетъ параллельно V; тогда AB спроектируется на V безъ искаженія. Если AB послѣ поворота будетъ параллельна V, то горизонтальная проекція AB должна быть послѣ поворота параллельной OX.

Это обстоятельство позволяетъ намъ опредѣлить уголъ поворота. Опустимъ изъ точки ii перпендикуляръ ik на ab.

Если послѣ поворота ab должно расположиться параллельно OX, то ik тогда расположится перпендикулярно къ OX. Проводимъ $ik_1 \perp OX$ и равнымъ ik.

Теперь остается черезъ точку k_1 провести линію a_1b_1, параллельную OX, и отложить на ней $a_1k_1 = ak$ и $b_1k_1 = bk$.

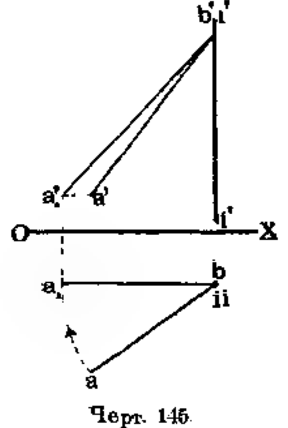
Тѣ же точки a_1 и b_1 можно получить на линіи a_1b_1, засѣкая ее изъ центра ii дугами радіусовъ ai и bi. Очевидно, что будутъ равны между собою углы

$$aia_1 = bib_1 = kik_1.$$

Вертикальныя проекціи точекъ A и B будутъ двигаться по линіямъ, перпендикулярнымъ къ $i'i'$, и найдутся въ точкахъ a_1' и b_1' пересѣченія этихъ линій съ перпендикулярами къ оси OX, проведенными изъ точекъ a_1 и b_1.

Длина $a_1'b_1'$ равна истинной длинѣ линіи AB.

При рѣшеніи этой задачи мы вращали двѣ точки A и B данной прямой. Можно было бы рѣшить ту же задачу проще, проведя ось II вращенія черезъ одну изъ точекъ, напримѣръ, B данной прямой (черт. 145). Тогда эта точка, какъ лежащая на оси вращенія, при поворотѣ прямой останется неподвижной. Послѣ же поворота горизонтальная проекція прямой должна расположиться параллельно OX. Поэтому для рѣшенія задачи вращаемъ ab вокругъ точки ii до тѣхъ поръ, пока ab не займетъ положеніе $a_1b \parallel OX$.



Черт. 145.

Точка a_1' опредѣлится пересѣченіемъ линій $a_1a_1' \perp OX$ и $a'a_1' \perp i'i'$. Линія $a_1'b'$ будетъ вертикальной проекціей повернутой линіи и будетъ выражать истинную длину отрѣзка AB.

Можно было бы ту же самую задачу рѣшить, повернувъ прямую въ положеніе, параллельное H. Для этого пришлось бы воспользоваться осью вращенія, перпендикулярною къ V.

γ) Вращеніе плоскости.

Разсмотримъ вращеніе плоскости въ двухъ случаяхъ ея заданія: слѣдами и случайными пересѣкающимися прямыми линіями.

На черт. 146 задана плоскость P слѣдами Pv, Ph.

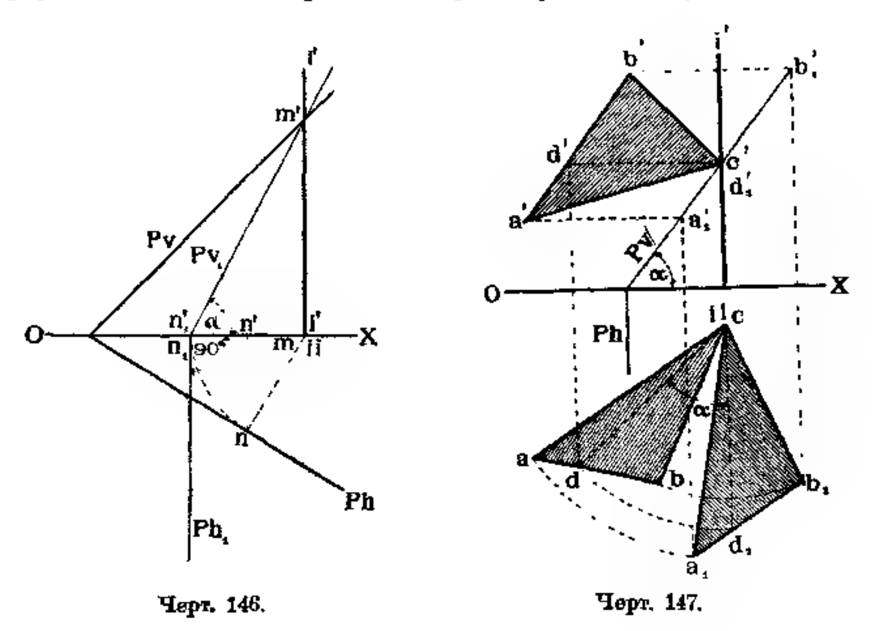
Предположимъ, что требуется опредѣлить уголъ наклона P къ H.

Если бы P была задана перпендикулярной къ V, то тогда искомый уголъ спроектировался бы на V безъ искаженія и былъ бы равенъ углу между вертикальнымъ слѣдомъ и осью OX.

Приведемъ плоскость къ такому заданію, пользуясь методомъ вращенія. Выберемъ ось II, параллельную H и лежащую въ плоскости V.

Пусть эта ось пересѣкаетъ Pv въ нѣкоторой точкѣ M, которая при вращеніи плоскости P будетъ оставаться неподвижной.

Послѣ поворота горизонтальный слѣдъ Ph плоскости долженъ расположиться перпендикулярно къ OX. Для того, чтобы найти его положеніе, опустимъ изъ точки ii перпендикуляръ in на Ph. Послѣ поворота этотъ перпендикуляръ совпадетъ съ осью OX и точка n—съ n_1, при чемъ $ni = n_1 i$. Точка N_1 и будетъ служить новою точкой схода слѣдовъ повернутой плоскости P. Проводимъ черезъ n_1 линію $Ph_1 \perp OX$ и соеди-



Черт. 146. Черт. 147.

няемъ n_1' съ m'. Линія $n_1'm'$ или Pv_1 будетъ вертикальнымъ слѣдомъ плоскости. Уголъ же α между Pv_1 и OX и будетъ искомымъ.

Разсмотримъ теперь случай вращенія плоскости, заданной не слѣдами, какъ ранѣе, а пересѣкающимися линіями.

Пусть, напримѣръ, (черт. 147) заданы проекціи плоскаго треугольника ABC, и требуется опредѣлить уголъ наклона его къ H.

Мы уже знаемъ, что уголъ наклона любой плоскости къ H измѣряется безъ искаженія на V, если данная плоскость будетъ перпендикулярна къ V.

Поэтому повернемъ плоскость треугольника ABC такъ, чтобы она расположилась перпендикулярно къ V.

Проведемъ черезъ точку C ось вращенія II, перпендикулярную къ плоскости H. Разсматриваемую задачу можно было бы свести къ предыдущей задачѣ, если бы былъ найденъ горизонтальный слѣдъ плоскости ABC. Для опредѣленія угла поворота достаточно горизонтальный слѣдъ

провести въ положеніе, перпендикулярное къ OX. Но, очевидно, вмѣсто самого горизонтальнаго слѣда достаточно знать только его направленіе. Чтобы найти это направленіе, воспользуемся горизонталью, которая, какъ извѣстно, параллельна горизонтальному слѣду. Пусть эта горизонталь будетъ BC (dc, $d'c'$). Будемъ вращать горизонталь вокругъ оси II, перпендикулярной къ H и проходящей черезъ точку C, до приведенія ея въ положеніе, перпендикулярное къ плоскости V. Для этого приводимъ dc съ положеніе d_1c, перпендикулярное къ OX. Уголъ поворота горизонтали α и опредѣлить тотъ уголъ, на который надо повернуть всѣ точки плоскости ABC, чтобы она стала перпендикулярной къ плоскости V. Поворачивая точки a и c на этотъ уголъ α и соединяя ихъ прямыми, опредѣлимъ искомое положеніе плоскости ABC. Дѣйствительно, вертикальныя проекціи a_1' и b_1' этихъ точекъ должны лежать съ одной стороны на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ a_1 и b_1 къ OX, а съ другой стороны на перпендикулярахъ $a_1'a_1'$, $b'b_1'$, опущенныхъ изъ точекъ a' и b' на ось $i'i'$. Въ пересѣченіи соотвѣтственныхъ перпендикуляровъ и найдемъ точки a_1' и b_1'.

Такъ какъ послѣ поворота плоскость ABC будетъ перпендикулярна къ V, то вертикальныя проекціи всѣхъ точекъ, лежащихъ въ ABC, должны находиться на новомъ вертикальномъ слѣдѣ Pv_1, т. е. Pv_1 пройдетъ черезъ точки a_1', c' и b_1'.

Уголъ α между Pv_1 и OX и будетъ искомымъ.

б) Вращеніе пространственныхъ тѣлъ.

При вращеніи пространственнаго тѣла вокругъ какой-нибудь оси на нѣкоторый уголъ α достаточно повернуть вершины или, вообще, точки, опредѣляющія форму тѣла, на тѣ же самые углы.

При этомъ необходимо помнить, что вращеніе всѣхъ точекъ слѣдуетъ производить въ одномъ и томъ же направленіи на одни и тѣ же углы, иначе нарушится взаимное расположеніе точекъ тѣла.

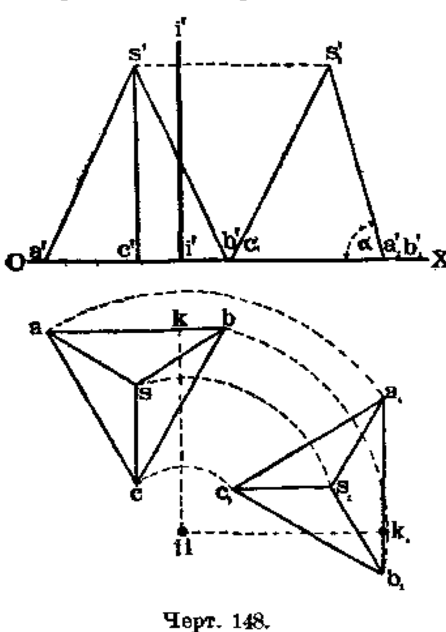
На чертежѣ 148 въ видѣ примѣра показано вращеніе пирамиды $SABC$ вокругъ оси $II \perp H$.

Пирамида вращается до тѣхъ поръ, пока ребро ея AB не сдѣлается перпендикулярнымъ къ V.

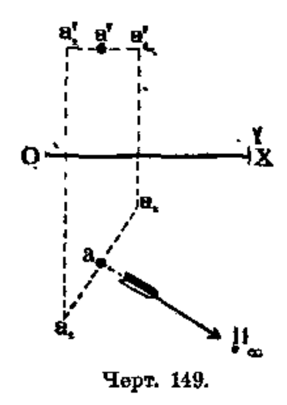
При этомъ линія ik, перпендикулярная къ AB, расположится параллельно OX. Послѣ такого поворота грани ABC и SAB, пересѣкающіяся по ребру AB, расположатся перпендикулярно къ V, и уголъ α между ними спроектируется на V безъ искаженія, будучи равнымъ углу $s_1'a_1'c_1'$.

ε) Вращеніе вокругъ безконечно удаленной оси.

Если ось вращенія II, оставаясь, напримѣръ, перпендикулярной къ H, будетъ удалена отъ вращаемой точки на безконечно большое разстояніе, то радіусъ вращенія точки будетъ безконечно большимъ, и точка будетъ двигаться уже не по кругу, а по прямой линіи, перпендикулярной къ радіусу и параллельной H. Иными словами, въ этомъ случаѣ вращеніе преобразуется въ прямолинейное движеніе точки, параллельное H (чертежъ 149).



Черт. 148.



Черт. 149.

Задача № 14.

На плоскости H лежать одною своей гранью трехгранная стеклянная призма **123456** (123456, 1'2'3'4'5'6').

Даны проекціи ab, $a'b'$ свѣтового луча, расположеннаго въ плоскости перпендикулярной къ ребрамъ призмы, и данъ показатель преломленія $\frac{3}{2}$. Требуется построить проекціи лучей: преломленнаго и выходящаго изъ призмы.

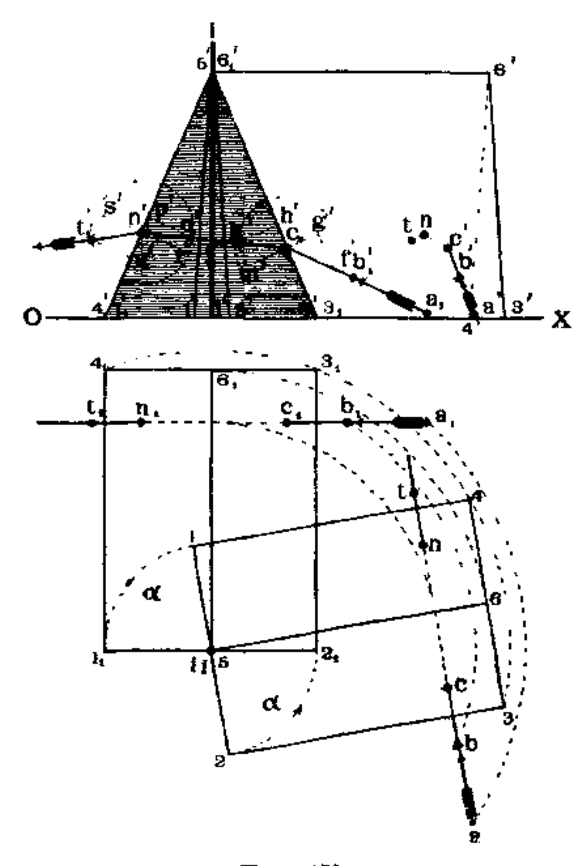
Рѣшеніе.

Такъ какъ всѣ построенія, относящіяся къ опредѣленію пути луча, будутъ располагаться въ плоскости, проходящей черезъ лучъ и перпендикулярной къ H и къ ребрамъ призмы, то для того, чтобы эти построенія проектировались, хотя бы на V, безъ искаженія, повернемъ призму и лучъ такъ, чтобы ребра призмы расположились перпендикулярно къ H. Для этого за ось вращенія выбираемъ линію II, проходящую черезъ вершину 6 призмы и перпендикулярную къ H. Послѣ поворота призмы и луча AB вокругъ этой оси на уголь α, призма расположится перпендикулярно къ V и займетъ положеніе $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$, $1_1' 2_1' 3_1' 4_1' 5_1' 6_1'$; проекціи же луча будутъ $a_1 b_1$, $a_1' b_1'$. Продолжая $a_1' b_1'$ до встрѣчи съ линіей $2_1' 5'$, найдемъ проекцію c_1' точки пересѣченія луча съ гранью 2356 призмы.

По закону Декарта лучъ падающій и лучъ преломленный составляютъ съ нор-

малью $m'g'$ углы, отношеніе синусовъ которыхъ равно показателю преломленія. Опишемъ изъ c_1' кругъ произвольнаго радіуса и замѣтимъ точку f' пересѣченія луча $a_1'b_1'$ съ этимъ кругомъ.

Пусть линія $m'g'$ перпендикулярна къ $5'2_1'$ Опустимъ изъ f' перпендикуляръ $f'g'$ на $m'g'$ и отложимъ $c_1'h' = \frac{3}{2} f'g'$



Черт. 150.

Изъ h' проведемъ $h'k' \perp 5'2_1'$ до пересѣченія съ кругомъ въ точкѣ k'. Линія $c'k'$ и опредѣлить направленіе преломленнаго луча, такъ какъ

$$\frac{\sin f'c_1'g'}{\sin k'c_1'm'} = \frac{f'g'}{k'm'} = \frac{3}{2}.$$

Продолжая лучъ $c_1'k'$ до пересѣченія съ линіей $4_1'6_1'$, найдемъ проекцію n_1' точки N_1 выхода его изъ призмы. Направленіе выходящаго луча опредѣлимъ подобнымъ же образомъ, имѣя въ виду, что

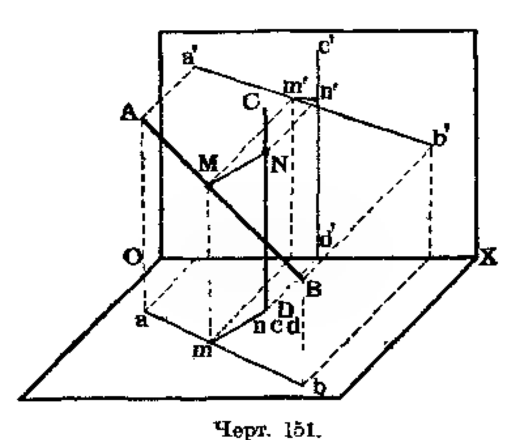
$$\frac{\sin qn_1'r'}{\sin t_1'n_1's'} = \frac{q'r'}{s't'} = \frac{2}{3}.$$

Найдя точки C, N и T при повернутомъ положеніи призмы, остается ихъ перенести на заданное положеніе призмы и луча, вращая эти точки вокругъ той же оси II, но въ обратную сторону на тѣ же углы α.

c) *Послѣдовательное вращеніе вокругъ двухъ осей, перпендикулярныхъ къ плоскостямъ проекцій.*

При рѣшеніи различныхъ задачъ очень часто приходится опредѣлять истинную форму и размѣры фигуръ, расположенныхъ въ случайно заданной плоскости; равнымъ образомъ часто приходится случайно заданную прямую линію приводить въ положеніе, перпендикулярное къ H или къ V. Конечно, выбравъ соотвѣтственнымъ образомъ въ пространствѣ какую-нибудь линію и принявъ ее за ось вращенія, можно данный геометрическій элементъ привести въ требуемое наивыгоднѣйшее положеніе. Однако, при такомъ вращеніи дуги круговъ, описываемыхъ различными его точками, спроектируются на V и на H въ дуги эллипсовъ, построеніе которыхъ затруднительно. Поэтому вмѣсто одного поворота вокругъ случайно расположенной оси и вмѣсто построенія эллипсовъ предпочитаютъ дѣлать два послѣдовательныхъ поворота вокругъ двухъ осей, выбирая одну изъ этихъ осей, перпендикулярную къ H, а другую, перпендикулярную къ V.

Прослѣдимъ примѣненіе этого метода въ рѣшеніи слѣдующей задачи: «Даны двѣ прямыя линіи: AB и CD, не параллельныя и не пересѣкающіяся. Опредѣлить разстояніе между ними, и положеніе ближайшихъ точекъ».



Черт. 151.

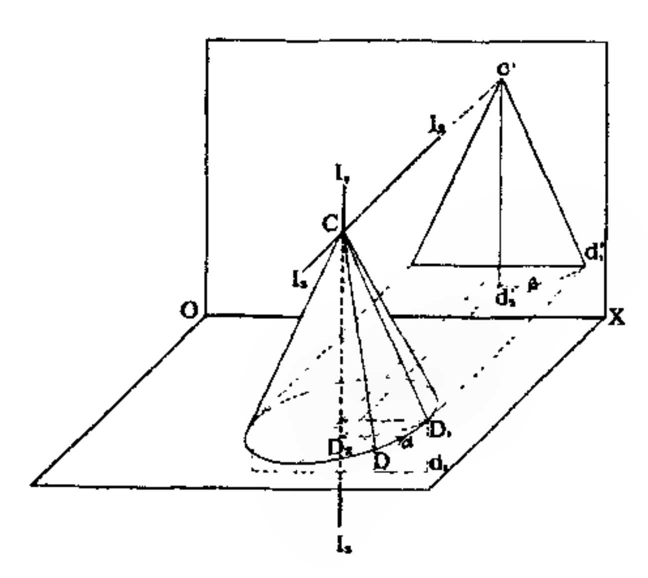
Предположимъ сначала, что прямыя линіи заданы не случайно, а такъ, что одна изъ нихъ, напримѣръ, CD (чертежъ 151) перпендикулярна къ H, и пусть точки M и N на прямыхъ являются ближайшими, иными словами, линія MN перпендикулярна къ AB и CD. При этомъ MN, будучи перпендикулярна къ CD, расположится параллельно H, прямой же уголь между AD и MN на основаніи теоремы 9-й (стр. 33) спроектируется на H безъ искаженія, т. е. mn будетъ перпендикулярна ab. Поэтому, если CD будетъ перпендикулярна къ H, то положеніе ближайшихъ точекъ M и N можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: изъ горизонтальной проекціи cd линіи CD опускаемъ перпендикуляръ cm на ab и находимъ самую точку M на AB. Далѣе, изъ M проводимъ горизонтальную плоскость, которая пересѣчетъ CD во второй искомой точкѣ N.

Итакъ, для рѣшенія задачи слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы одна изъ данныхъ линій расположилась бы перпендикулярно къ H.

Этого легко достичь, пользуясь методомъ вращенія.

Для этого проведемъ сначала черезъ точку C ось I_1I_1, перпендикулярную къ H, и повернемъ прямую CD вокругъ этой оси до положенія CD_1, параллельнаго V (черт. 152).

Далѣе, проведемъ черезъ ту же точку C вторую ось вращенія I_2I_2 и повернемъ прямую CD_1 вокругъ этой оси до положенія, перпендикулярнаго къ H, которое и является выгоднымъ для рѣшенія задачи.



Черт. 152.

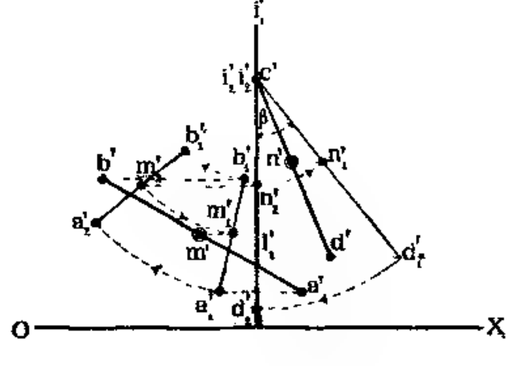
При рѣшеніи этой задачи въ проекціяхъ не слѣдуетъ забывать, что при послѣдовательныхъ поворотахъ прямой CD вокругъ двухъ осей необходимо вмѣстѣ съ CD вращать и другую прямую AD на тѣ же углы въ томъ же направленіи и вокругъ тѣхъ же осей, иначе нарушится взаимное расположеніе прямыхъ.

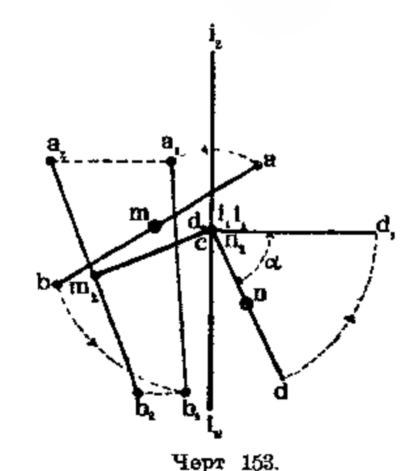
На черт. 153 эта задача рѣшена въ проекціяхъ. Первый поворотъ на уголъ α сдѣланъ вокругъ оси $I_1I_1 \perp H$. Новыя проекціи прямыхъ будутъ a_1b_1, $a_1'b_1'$ и cd_1, $c'd_1'$. При этомъ прямая CD оказалась уже параллельной V.

Второй поворотъ сдѣланъ на уголъ β вокругъ оси $I_2I_2 \perp V$. Послѣ поворота линія CD оказалась перпендикулярной къ H. Новыя проекціи прямыхъ: a_2b_2, $a_2'b_2'$ и cd_2, $c'd_2'$.

Проводимъ теперь изъ c перпендикуляръ къ a_2b_2 до пересѣченія съ a_2b_2 въ точкѣ m_2, находимъ на $a_2'b_2'$ точку m_2', и изъ m_2' проводимъ линію, параллельную OX, до пересѣченія съ $c'd_2'$ въ точкѣ n_2'. Точка n_2

совпадетъ съ *c*. Точки *N* и *M* и будутъ искомыми, при чемъ длина n_2m_2 выражаетъ разстояніе между *AD* и *CD*.





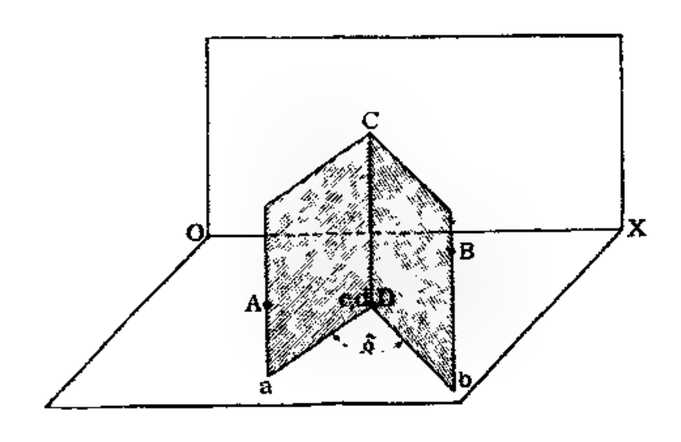
Черт 153.

Вращая точки *M* и *N* вокругъ тѣхъ же осей на тѣ же углы, но въ обратную сторону, получимъ положенія ихъ m', m и n', n на заданныхъ прямыхъ.

Рѣшимъ еще одну задачу въ видѣ примѣра на вращеніе вокругъ двухъ осей: «опредѣлить величину угла между двумя плоскостями».

Вспомнимъ, что величиной угла между двумя плоскостями или двуграннаго угла называется линейный уголъ между линіями, полученными отъ разсѣченія граней угла плоскостью, перпендикулярной къ его ребру.

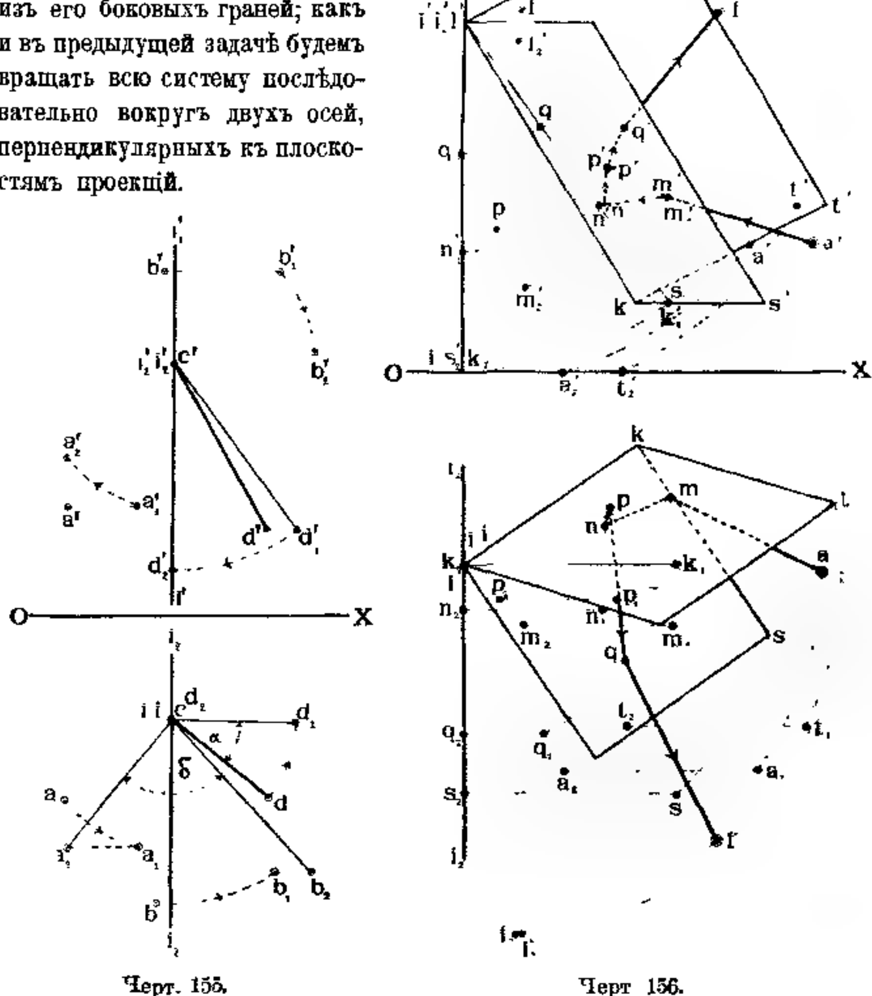
Если бы (черт. 154) плоскости *ACD* и *BCD* были заданы такъ, что линія *CD* ихъ сѣченія была бы перпендикулярна къ *H*, то искомый уголъ спроектировался бы *H* безъ искаженія и былъ бы равенъ углу между линіями, соединяющими гори-



Черт. 154.

зонтальную проекцію cd ребра съ проекціями случайныхъ точекъ, напримѣръ, A и B, лежащихъ въ граняхъ угла.

Имѣя въ виду удобство измѣренія двуграннаго угла, когда его ребро перпендикулярно къ H, приведемъ заданную систему именно къ такому положенію. На черт. 155 даны ребро двуграннаго угла CD и по одной точкѣ A и B каждой изъ его боковыхъ граней; какъ и въ предыдущей задачѣ будемъ вращать всю систему послѣдовательно вокругъ двухъ осей, перпендикулярныхъ къ плоскостямъ проекцій.



Черт. 155. Черт 156.

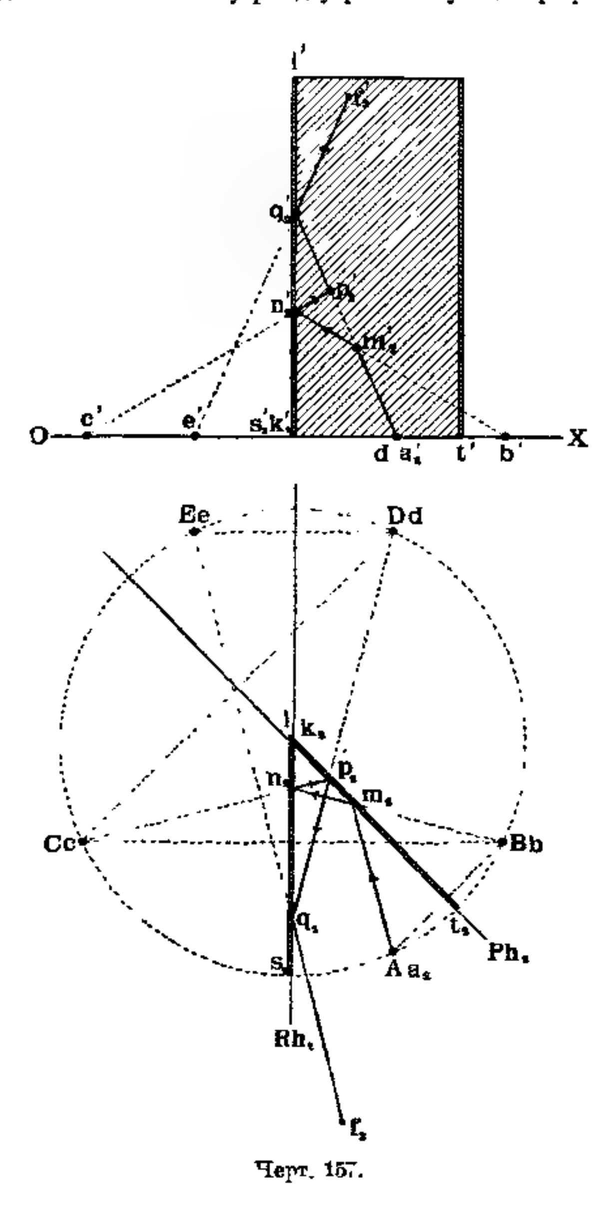
1-ое вращеніе вокругъ оси $I_1I_1 \perp H$ на уголъ α. Послѣ поворота $CD \parallel V$. Новыя проекціи cd_1, cd_1', a_1, a_1' и b_1, b_1'.

2-ое вращеніе вокругъ оси $I_2I_2 \perp V$ на уголъ β. Послѣ поворота $CD \perp H$. Новыя проекціи cd_2, $c'd_2'$, a_2, a_2', b_2, b_2'.

Соединяя точку c съ a_2 и съ b_2, получимъ искомый уголъ δ между прямыми ca_2 и cb_2.

Задача № 15.

Даны въ пространствѣ два плоскихъ зеркала TKL и SKL, пересѣкающихся по линіи KL, и двѣ точки A и F внутри двуграннаго угла, образуемаго зеркалами



Черт. 157.

(черт. 156). Предполагая точку A свѣтящейся, построить проекціи свѣтового луча, который, выйдя изъ точки A и отразившись отъ каждаго зеркала по два раза, попалъ бы въ точку F.

Рѣшеніе

Для удобства построеній, приведемъ заданную систему зеркалъ и точекъ послѣдовательнымъ вращеніемъ вокругъ двухъ осей $I_1I_1 \perp H$ и $I_2I_2 \perp V$ въ такое положеніе, чтобы ребро KL расположилось перпендикулярно къ H. Рѣшеніе такой задачи было объяснено ранѣе (стр. 78).

Послѣ второго поворота зеркала и точки займутъ положенія: k_2ls_2, $k_2'l_2s_2'$, k_2lt_2, $k_2'l't_2'$, a_2a_2', f_2f_2' (черт. 156).

Перенесемъ эти данныя на новый чертежъ (черт. 157), гдѣ зеркала и точки A и F обозначены тѣми же буквами, какъ и на черт. 156 послѣ второго поворота. При этомъ оказалось случайно, что точка A совпала съ H и зеркала наклонены другъ къ другу подъ угломъ въ 45°. (Уголъ между Ph_2 и Bh_2 равенъ 45°).

Лучъ, идущій изъ A и отражаемый сначала зеркаломъ P, представляется какъ бы исходящимъ изъ точки B, симметричной A относительно P. Этотъ новый лучъ, отражаясь зеркаломъ B, представляется какъ бы исходящимъ изъ точки C, симметричной съ B относительно зеркала R и т. д. Точки A, B, C, D, E, изъ которыхъ послѣдовательно какъ бы исходятъ отраженные лучи, лежатъ на окружности проходящей черезъ точку A съ центромъ въ точкѣ lk_2.

Окончательное направленіе луча будетъ FF_2, при чемъ онъ пересѣкаетъ зеркало B въ точкѣ q_2, q_2'. Соединяя эту точку съ точкою D, получимъ предыдущее направленіе луча, пересѣкающее зеркало P въ точкѣ p_2, p_2'.

Далѣе, идя назадъ, найдемъ направленіе луча P_2C, пересѣкающее зеркало R въ точкѣ n_2, n_2'. Соединяя N_2 съ B, получимъ еще лучъ, пересѣкающій зеркало P въ точкѣ M_2.

Наконецъ, соединяя M_2 съ A, получимъ начальное направленіе луча.

Такимъ образомъ полный путь луча въ пространствѣ будетъ $AM_2N_2P_2Q_2F_2$ и въ проекціяхъ: $a_2m_2n_2p_2q_2f_2$ и $a_2'm_2'n_2'p_2'q_2'f_2'$.

Можно было бы получить второе рѣшеніе, предполагая, что лучъ, выходящій изъ A, отражается сначала отъ зеркала R.

Опредѣливъ на чертежѣ 157 положеніе точекъ M_2, N_2, P_2 и Q_2 на зеркалахъ, остается ихъ привести къ заданному положенію зеркалъ и точекъ A и F, для чего полученныя четыре точки слѣдуетъ вращать въ обратную сторону вокругъ тѣхъ же осей I_1I_1 и I_2I_2 и на тѣ же углы, что и исполнено на черт. 156, на которомъ показаны проекціи луча $amnpqf$ и $a'm'n'p'q'f'$ при заданномъ положеніи зеркалъ и точекъ A и F.

---

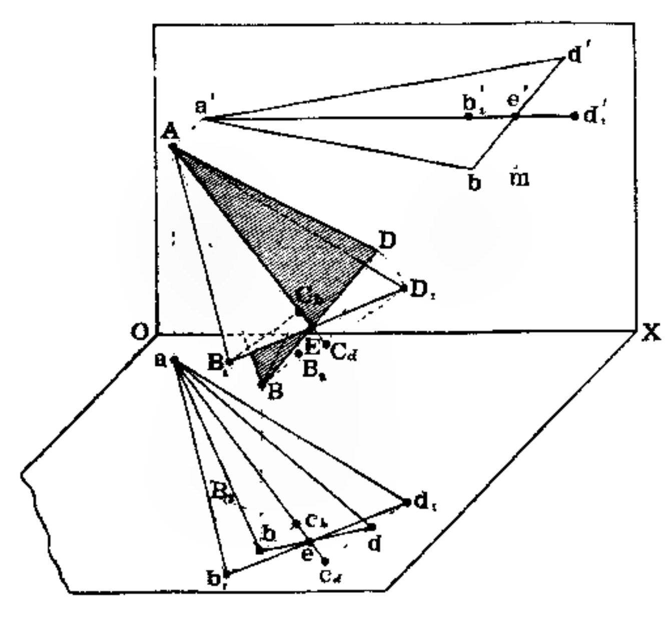
d) *Вращеніе плоскости вокругъ ея горизонтали или фронтали.*

Если геометрическіе элементы, величину которыхъ необходимо опредѣлить, лежатъ въ одной плоскости, то можно спроектировать ихъ безъ искаженія при помощи одного поворота плоскости, въ которой они лежатъ, вокругъ какой-нибудь горизонтали или фронтали этой плоскости. Вращая плоскость вокругъ горизонтали, можно повернуть плоскость въ положеніе, параллельное *H*, и, слѣдовательно, спроектировать всѣ находящіяся въ ней фигуры безъ искаженія на *H*.

Вращая же плоскость вокругъ фронтали, можно привести плоскость въ положеніе, параллельное *V*, и спроектировать всѣ лежащія въ ней фигуры безъ искаженія на *V*. Каждая точка плоскости, при вращеніи ея, напримѣръ, вокругъ горизонтали, будетъ описывать въ пространствѣ кругъ, плоскость котораго будетъ перпендикулярной къ горизонтали.

Такой кругъ спроектируется на H въ прямую линію, перпендикулярную къ горизонтальной проекціи горизонтали, на V же онъ спроектируется въ видѣ эллипса, построенія котораго однако возможно избѣжать.

Пусть, напримѣръ, данъ плоскій треугольникъ ABD (черт. 158). Проведемъ въ его плоскости черезъ точку A горизонталь AE и повернемъ треугольникъ вокругъ этой горизонтали такъ, чтобы онъ расположился параллельно H.



Черт. 158.

При вращеніи точки A и E треугольника, какъ лежащія на оси вращенія, будутъ оставаться неподвижными.

Точки же B и D будутъ описывать круги съ центрами въ C_b и C_d, лежащими на оси вращенія.

Кругъ вращенія точки D спроектируется на H въ прямую линію bc_b перпендикулярную къ ae, причемъ точка c_b пересѣченія этой линіи съ ae будетъ служить проекціей центра C_b вращенія точки D.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что кругъ вращенія точки D спроектируется на H въ прямую линію, перпендикулярную къ ae, и точка c_d пересѣченія этой линіи съ ae будетъ служить проекціей центра C_d вращенія точки D.

При вращеніи точки B, горизонтальная проекція ея будетъ двигаться по линіи bc_b. Когда плоскость ABB сдѣлается параллельной H, тогда радіусъ вращенія BC_b спроектируется на H безъ искаженія. Величину

же этого радіуса нетрудно опредѣлить, напримѣръ, на основаніи теоремы 4 (стр. 21). Для этого опредѣляемъ разность возвышеній точекъ B и C_b надъ B. Эта разность равна отрѣзку $e'm$—возвышенію горизонтали надъ B. На сторонѣ bc_b, какъ на катетѣ, строимъ прямоугольный треугольникъ B_3bc_b, другой катетъ котораго $B_3b = e'm$. Длина B_3c_b гипотенузы и равна длинѣ радіуса вращенія точки B. Засѣкая линію bc_b дугою радіуса B_3c_b изъ центра c_b, получимъ проекцію b_1 точки B въ повернутомъ положеніи. Горизонтальная проекція стороны BED треугольника послѣ поворота займетъ положеніе b_1e.

Черт. 159.

Черт. 160.

Положеніе же точки d_1 опредѣлится изъ двухъ условій: съ одной стороны она должна лежать на линіи b_1e, а съ другой, при вращеніи точки B, ея горизонтальная проекція должна двигаться по линіи dc_d, перпендикулярной къ ae, иными словами точки d_1 опредѣляется пересѣченіемъ линій b_1e и dc_d.

Соединяя точки b_1, d_1 и a другъ съ другомъ, получимъ горизонтальную проекцію треугольника ABD, опредѣляющую истинную фигуру послѣдняго, вертикальная же проекція треугольника послѣ поворота превращается въ прямую линію $a'b_1'd_1'$.

На черт. 159 всѣ описанныя построенія воспроизведены въ проекціяхъ.

Въ качествѣ примѣра примѣненія такого метода рѣшимъ слѣдующую задачу.

Данъ плоскій четыреугольникъ $ABBF$ (черт. 160). Построить въ его плоскости равносторонній треугольникъ, длина стороны котораго дана.

Планъ рѣшенія задачи будетъ слѣдующій: Повернемъ четыреугольникъ вокругъ его фронтали до положенія, параллельнаго V. При такомъ положеніи его построимъ въ немъ требуемый треугольникъ, который будетъ на V проектироваться безъ искаженія.

Затѣмъ данный четыреугольникъ съ построенной въ немъ фигурой повернемъ вокругъ той же оси обратно на тотъ же уголъ и найдемъ проекціи треугольника. На черт. 160 эта задача рѣшена въ проекціяхъ.

Данъ четыреугольникъ (параллелограммъ) $ABBF$. За ось вращенія принята фронталь BE. При вращеніи фигуры вертикальныя проекціи ея вершинъ будутъ двигаться по линіямъ перпендикулярнымъ къ $d'e'$. Радіусъ вращенія точки B равенъ гипотенузѣ B_1c_b' прямоугольнаго треугольника, у котораго одинъ катетъ—проекція $b'c'_b$, а другой $b'B_1 = bm$. Откладывая $b_1'c_b' = B_1c_b'$, получимъ проекцію повернутаго положенія точки B. Соединяя точки b_1' и d', получимъ проекцію повернутой стороны BB, соединяя же b_1' и e' и продолжая $b_1'e'$ до пересѣченія съ $a'c_a' \perp d'e'$, получимъ точку a_1', проекцію повернутой точки A. Остается провести $a_1'f_1' \mid b_1'd'$ и $d'f_1' \mid b_1'a_1'$.

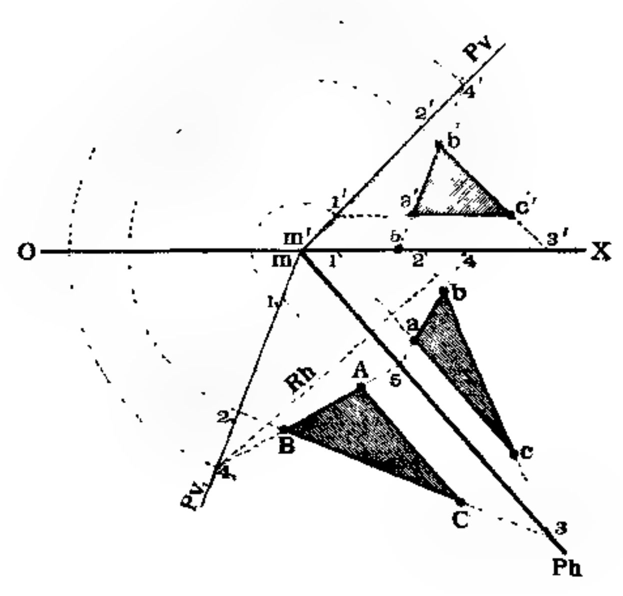
Фигура $a_1'b_1'd'f_1'$ даетъ намъ истинный видъ параллелограмма $ABBF$. Строимъ внутри него произвольно расположенный равносторонній треугольникъ $1_1'2_1'3_1'$, удовлетворяя лишь условію, чтобы сторона его равнялась данной длинѣ. Замѣчаемъ шесть точекъ k_1', l_1', m_1', n_1', q_1', p_1' пересѣченія сторонъ его со сторонами четыреугольника $a_1'b_1'd'f_1'$. Будемъ теперь вращать четыреугольникъ обратно. Четыре изъ упомянутыхъ точекъ q_1', p_1', m_1', n_1' при этомъ будутъ двигаться по линіямъ перпендикулярнымъ къ $d'e'$. Замѣчаемъ точки q', p', m', n', пересѣченія этихъ линій со сторонами первоначальнаго четыреугольника.

Точки же k', l', какъ лежащія на проекціи оси вращенія, во время обратнаго вращенія будутъ оставаться неподвижными. Соединяя теперь попарно полученныя шесть точекъ линіями $k'n'$, $l'p'$, $q'm'$, получимъ въ точкахъ пересѣченія этихъ линій вертикальныя проекціи вершинъ $1'$, $2'$, $3'$ искомаго треугольника.

Найдя горизонтальныя проекціи k, l, m, n, p, q точекъ K, L, M, N, P и Q и попарно соединивъ ихъ, получимъ горизонтальныя проекціи 1, 2, 3 вершинъ треугольника. Проекціи искомаго треугольника на чертежѣ заштрихованы.

е) Совмѣщеніе.

Методъ совмѣщенія является частнымъ случаемъ вращенія плоскостей вокругъ ихъ горизонталей или фронталей, именно, за ось вращенія принимается не случайная горизонталь или фронталь плоскости, а горизонтальный или вертикальный слѣдъ плоскости. При такихъ условіяхъ плоскость послѣ поворота совпадетъ или совмѣстится съ плоскостью H, если вращеніе происходило вокругъ горизонтальнаго слѣда, или съ плоскостью V, если вращеніе происходило вокругъ вертикальнаго слѣда.



Черт. 161.

Методъ совмѣщенія примѣняется тогда, когда требуется опредѣлить истинный видъ фигуръ, лежащихъ въ какой-нибудь плоскости, или въ этой плоскости требуется построить фигуру, форма и размѣры которой даны. При этомъ предполагается, что хотя бы одинъ изъ слѣдовъ плоскости, вокругъ котораго можно было бы совмѣстить данную плоскость съ плоскостью проекцій, лежитъ въ предѣлахъ чертежа.

Пусть, напримѣръ, на черт. 161 дана плоскость P, въ которой лежитъ треугольникъ ABC. Требуется опредѣлить истинную фигуру этого треугольника.

Если мы совмѣстимъ плоскость P вмѣстѣ съ лежащимъ къ ней треугольникомъ съ плоскостью H, то тогда на H фигура треугольника будетъ проектироваться безъ искаженія.

Принимаемъ за ось вращенія слѣдъ *Ph*. Продолжимъ стороны треугольника до пересѣченія со слѣдами плоскости въ точкахъ 1, 2, 3, 4, 5.

Найдемъ совмѣщенное положеніе слѣда *Pv*. Точка схода *M* во все время поворота будетъ оставаться неподвижной, такъ какъ она лежитъ на оси вращенія. Слѣдовательно, послѣ поворота совмѣщенный вертикальный слѣдъ долженъ пройти опять черезъ нее. Найдемъ повернутое положеніе какой-нибудь точки, напримѣръ, **4** этого слѣда.

При вращеніи вокругъ *Ph* точка **4** будетъ двигаться въ плоскости *B*, перпендикулярной къ *Ph*. Горизонтальная проекція 4 этой точки будетъ двигаться вдоль горизонтальнаго слѣда *Rh*, который долженъ проходить черезъ точку 4 и долженъ быть перпендикулярнымъ къ *Ph*. Когда послѣ поворота точка **4** совпадетъ съ *H*, на эту же плоскость спроектируется безъ искаженія линія *M***4**, истинная длина которой равна отрѣзку $m'4'$. Такимъ образомъ совмѣщенное положеніе 4_1 точки **4** опредѣлится какъ точка пересѣченія двухъ линій: 44_1, перпендикулярной къ *Ph*, и дуги круга, описаннаго изъ точки mm' радіусомъ $m'4'$.

Соединяя точки 4_1 съ mm', получимъ совмѣщенное положеніе Pv_1 слѣда *Pv*.

Описывая изъ центра mm' дуги радіусовъ $m'1$ и $m'2$ до пересѣченія съ Pv_1, получимъ совмѣщенныя положенія 1_1, 2_1 точекъ 1 и 2.

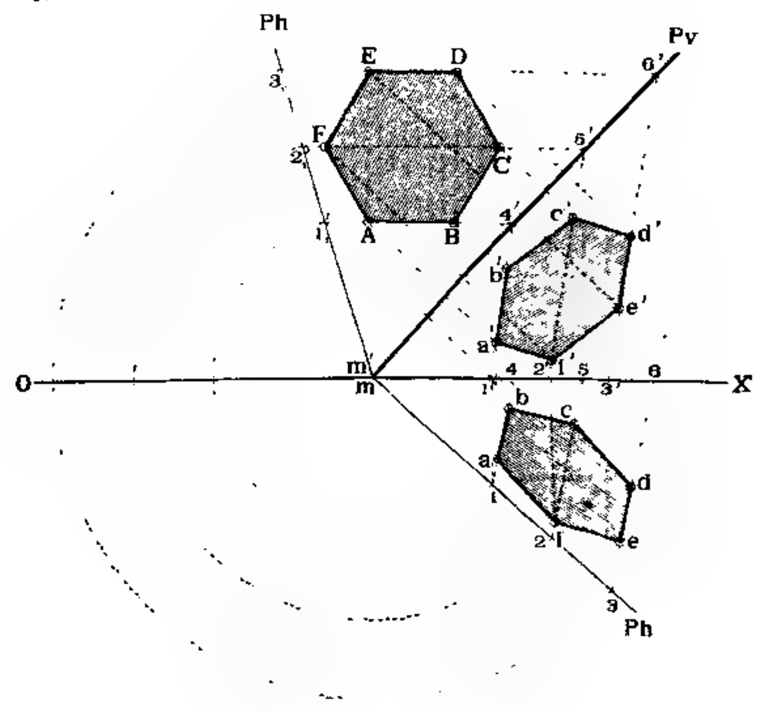
Такъ какъ точки 3 и 5, лежащія на слѣдѣ *Ph*, при вращеніи остаются неподвижными, то соединяя ихъ соотвѣтственно съ точками 2_1 и 4_1, получимъ совмѣщенныя положенія линій **23** и **45**. Пересѣченіе этихъ линій другъ съ другомъ даетъ совмѣщенное положеніе вершины *B* треугольника.

На черт. 161 сторона *AC* треугольника случайно задана параллельной *Ph*. Поэтому и при совмѣщеніи *P* съ *H* эта сторона, проходя черезъ точку 1_1, расположится параллельно *Ph* и пересѣчетъ двѣ другія линіи 4_15 и 2_13 въ точкахъ *A* и *C*, опредѣляющія совмѣщенныя положенія двухъ другихъ вершинъ треугольника, истинная фигура котораго будетъ *ABC*.

Рѣшимъ еще такую задачу (черт. 162): Дана плоскость *P*. Требуется построить въ ней правильный шестиугольникъ, длина стороны котораго извѣстна.

Для рѣшенія этой задачи совмѣстимъ *P* съ *V*, вращая *P* вокругъ *Pv*. Найдемъ совмѣщенное положеніе слѣда *Ph* такъ же, какъ находили въ предыдущей задачѣ слѣдъ Pv_1. Какая-нибудь точка 1, 1′ слѣда *Ph* при вращеніи *P* будетъ описывать въ пространствѣ кругъ, плоскость котораго будетъ перпендикулярна къ *V* и къ *Pv*. Вертикальная проекція 1′ будетъ, при вращеніи точки **1** двигаться по линіи $1'1_1'$, перпендикуляр-

ной къ Pv. Когда же Pv совмѣстится съ V, длина отрѣзка отъ точки схода M до точки **1**, равная $m1$, будетъ на V проектироваться безъ искаженія. Поэтому точка $1_1'$ опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ линій: $1'1_1'$, перпендикулярной къ Pv, и дуги круга, описаннаго изъ точки mm, какъ изъ центра, радіусомъ $m1$. Соединяя точки m' и $1_1'$, получимъ линію Ph_1, совмѣщенной съ V слѣдъ Ph.



Черт. 162.

Строимъ теперь внутри угла между Pv и Ph_1 правильный шестиугольникъ $ABCDFF$ по данной его сторонѣ, при чемъ, для простоты построеній, предполагаемъ, что продолженіе одной изъ сторонъ его AB проходитъ черезъ точку $1_1'$.

Продолжаемъ линіи AB, BE и CF до пересѣченія съ линіями Pv и Ph_1 въ точкахъ $1_1'4'$, $2_1'5'$ и $3_1 6'$.

При обратномъ вращеніи плоскости P точки $4'$, $5'$, $6'$, какъ лежащія на оси вращенія, останутся неподвижными. Точки же $2_1'$ и $3_1'$, какъ лежащія на Ph_1, расположатся на Ph въ разстояніяхъ $m2 = m'2_1'$ и $m3 = m'3_1'$.

Находимъ вертикальныя проекціи $1'$, $2'$, $3'$ точекъ **1**, **2**, **3** и горизонтальныя проекціи 4, 5, 6 точекъ **4**, **5**, **6** и строимъ проекціи линій **14**, **25**, **36**, на которыхъ лежатъ вершины шестиугольника.

При вращеніи послѣдняго вокругъ Pv, каждая его вершина будетъ описывать кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ Pv. Вертикальныя проекціи вершинъ будутъ двигаться по линіямъ, проходящимъ соотвѣтственно черезъ точки A, B, C... и перпендикулярнымъ къ Pv.

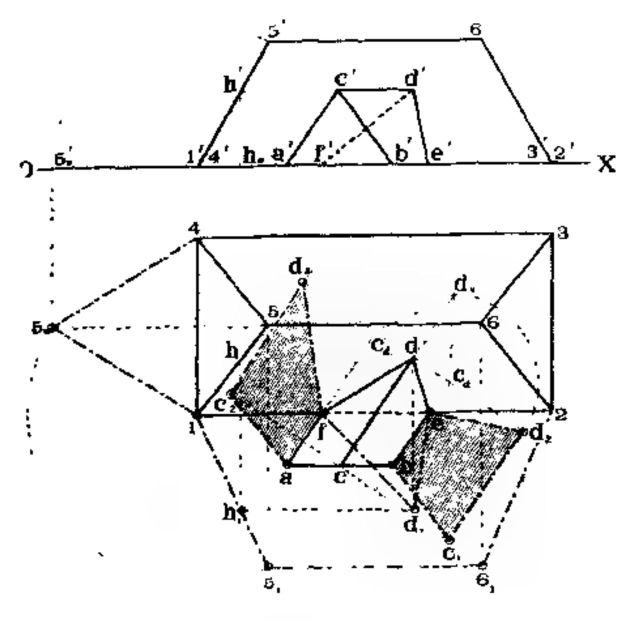
Находя пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ вертикальными проекціями линій $1'4'$. $2'5'$ и $3'6'$, на которыхъ должны лежать соотвѣтственныя вершины, получимъ точки a, b', c', d', e', f'; опуская же изъ нихъ перпендикуляры къ OX до пересѣченія съ линіями 14, 25, 36, найдемъ и горизонтальныя проекціи вершинъ шестиугольника.

Задача № 16.

На черт. 163 даны проекціи двухъ пересѣкающихся между собою по линіямъ ED и FD крышъ: **123456** и $ABEECD$. Опредѣлить истинную фигуру каждой грани крыши.

Рѣшеніе.

Опредѣлимъ сначала форму граней большой крыши, имѣя при этомъ въ виду, что грани **145** и **1265** соотвѣтственно одинаковы съ гранями **236** и **3456**.



Черт. 163.

Для опредѣленія истинной фигуры грани **145** совмѣстимъ ее съ H, вращая ее налѣво вокругъ слѣда **14**, перпендикулярнаго къ V. При этомъ точка **5** этой грани опишетъ въ пространствѣ кругъ, проектирующійся на V безъ искаженія. Совмѣщенное положеніе 5_0, точки **5** опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ линій: $55_0 \perp 14$ и $5_0'5_0 \perp OX$, при чемъ $5_0'1' = 1'5'$.

Треугольникъ 145_0 и является истинной фигурой грани **145**.

Для опредѣленія истиннаго вида грани **1265** совмѣщаемъ ее съ H, вращая вокругъ **12**. При этомъ точки **5** и **6** будутъ двигаться по линіямъ 55_1 и 66_1, перпен-

дикулярнымъ къ 12. Послѣ же совмѣщенія длина реберъ **15** и **26** должна проектироваться на *H* безъ искаженія. Но длина этихъ реберъ равна отрѣзку $1 5_0$.

Засѣкая линію 55_1 дугою изъ центра 1 радіуса 15_0, получимъ совмѣщенное положеніе 5_1 точки 5. Линія 56_1 пойдетъ параллельно 12 до пересѣченія съ 66_1 въ точкѣ 6_1.

Трапеція 126_15_1 и будетъ являться истинной фигурой грани **1256**. Найдемъ на ней истинный видъ треугольника *FDE* примыканія малой крыши.

Проведемъ въ грани **1256** черезъ точку *D* горизонталь, которая пересѣчетъ ребро **15** въ точкѣ h', h. При совмѣщеніи точка *H* займетъ положеніе h_1, а горизонталь пойдетъ по линіи h_1d_1 параллельной 12. Точка пересѣченія h_1d_1 съ $dd_1 \perp 12$ и опредѣлитъ совмѣщенное положеніе d_1 точки *D*. Соединяя d_1 съ f и e, получимъ истинный видъ fd_1e треугольника FD_1E примыканія малой крыши къ большой.

Построимъ теперь истинныя фигуры боковыхъ граней малой крыши.

Совмѣстимъ грань *BEDC* съ *H*, вращая ее вокругъ *be*. При этомъ точки *d* и *c* будутъ двигаться по линіямъ перпендикулярнымъ къ *be*. Центромъ вращенія точки *d* будетъ c_d. Величина радіуса вращенія точки *d* равна гипотенузѣ d_0c_d треугольника dd_0c_d, у котораго катетъ $dd_0 = hh_0$ — возвышенію точки *D* надъ центромъ C_d. Откладывая $c_dd_2 = d_0c_d$, получимъ совмѣщенное съ *H* положеніе d_2 точки *d*. Положеніе точки c_1 опредѣлится, какъ пересѣченіе линій $cc_1 \perp be$ и $d_2c_1 \parallel be$. Фигура bed_2c_1 даетъ истинный видъ грани *BEDC*.

Истинный видъ грани *AEDC* опредѣляемъ подобнымъ же образомъ, для чего проводимъ $dd_3 \perp af$ и откладываемъ $c_{d_1}d_3 = c_{d_1}d_0$. Далѣе проводимъ $d_3c_2 \parallel af$ до пересѣченія съ $cc_2 \perp af$. Фигура afd_3c_2 и будетъ искомой.

---

§ 11. Перемѣна плоскостей проекцій.

а) *Общія понятія.*

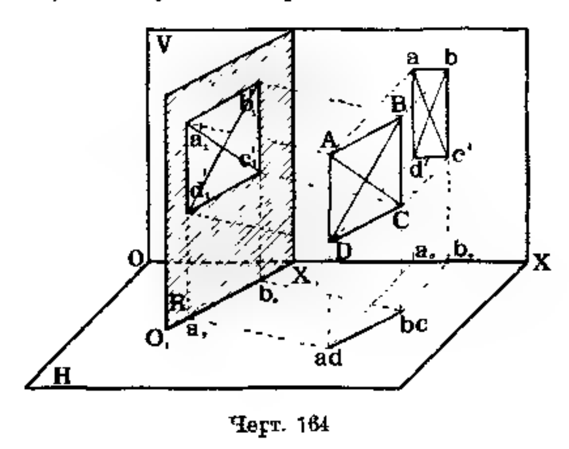
При пользованіи методомъ вращенія фигуръ, мы предполагали, что плоскости проекцій находятся въ неизмѣнномъ положеніи. Для того же, чтобы фигура проектировалась на одну изъ этихъ плоскостей безъ искаженія, мы вращали самую фигуру.

Однако, того же самаго результата мы могли бы достичь, не двигая фигуры, а мѣняя плоскости проекцій такъ, чтобы данная фигура проектировалась на новую плоскость проекцій безъ искаженія.

Напримѣръ, на чертежѣ 164, показанъ квадратъ *ABCD*, плоскость котораго перпендикулярна къ *H*, но не параллельна *V*. Поэтому квадратъ проектируется на *V* съ искаженіемъ. Если же мы спроектируемъ его на плоскость *R*, параллельную плоскости квадрата, то на эту плоскость квадратъ будетъ уже проектироваться безъ искаженія.

При замѣнѣ одной изъ старыхъ плоскостей проекцій новою, необходимо послѣднюю выбирать перпендикулярной къ оставляемой старой плоскости проекцій, напримѣръ (черт. 164), при замѣнѣ плоскости *V* новой *R*, послѣдняя должна быть перпендикулярна къ *H*. Этого правила необходимо придерживаться потому, что тогда и для новой пары плоскостей проекцій (*H* и *R*) сохранятся въ силѣ всѣ теоремы и выводы, которые были приведены ранѣе.

Линія сѣченія новой плоскости проекцій съ оставляемой старой называется *новою осью проекцій* и обозначается буквами O_1X_1, причемъ если эта ось одна, и получилась при замѣнѣ одной изъ старыхъ пло-



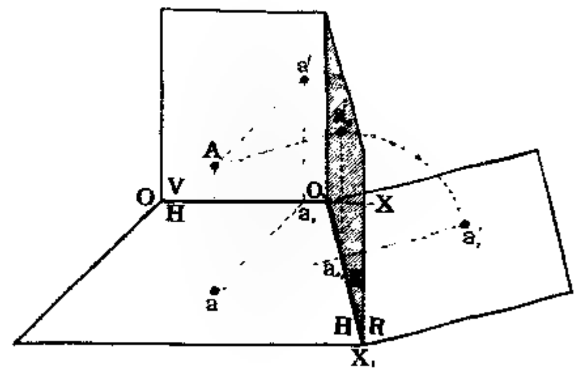
Черт. 164

скостей V или H проекцій новою, то внизу буквъ ставится цифра 1. Если же приходится кромѣ V мѣнять еще и H, то вторую ось обозначаютъ буквами O_2X_2 и т. д.

Разсмотримъ сначала рядъ случаевъ, когда приходится мѣнять одну плоскость проекцій, а затѣмъ перейдемъ и къ случаю перемѣны обѣихъ плоскостей проекцій.

b) *Перемѣна одной плоскости проекцій.*

Пусть дана въ пространствѣ точка A (черт. 165) и показаны ея ортогональныя проекціи a' и a на плоскости V и H.



Черт. 165.

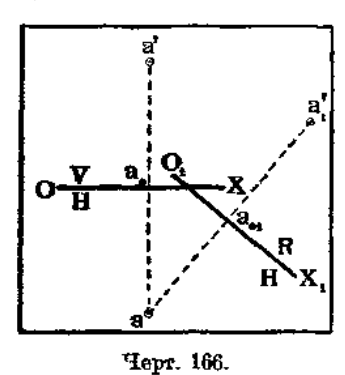
Проведемъ новую плоскость проекцій R, перпендикулярную H, и замѣняющую V, и пусть проекціей точки A на R будетъ точка a_1'. Не-

трудно видѣть, что разстояніе новой вертикаяльной проекціи a_1' точки A на R отъ новой оси O_1X_1 равно разстоянію старой вертикальной проекціи a' отъ старой оси OX, т. е. $a_1'a_{01}' = a'a_0$.

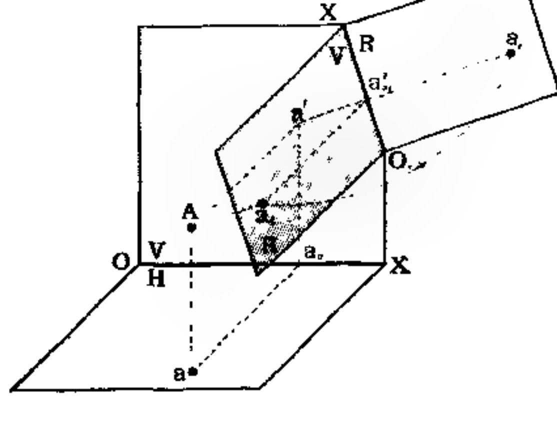
Плоскость R называется *новой вертикальной плоскостью проекцій*, а точка a_1' называется *новой вертикальной проекціей точки A*. Обозначается эта точка малой буквой того же наименованія съ двумя значками справа—внизу и вверху.

При разстановкѣ буквъ, обозначающихъ новую ось, будемъ придерживаться слѣдующаго правила:

Предположимъ, что на передней полѣ H слѣва стоитъ зритель и смотритъ на верхнюю полу R; тогда лѣвый конецъ оси долженъ быть обозначенъ буквою O_1, а правый—X_1. Откинемъ теперь верхнюю полу по направленію отъ зрителя, т. е. вправо назадъ до совпаденія съ H. Тогда, по свойству ортогональныхъ проекцій, точка a_1' упадетъ на H и расположится на линіи aa_1' перпендикулярной къ O_1X_1, при чемъ растояніе $a_{01}a_1'$ останется равнымъ a_0a'. На черт. 166 тѣ же построенія показаны въ проекціяхъ.



Черт. 166.



Черт. 167.

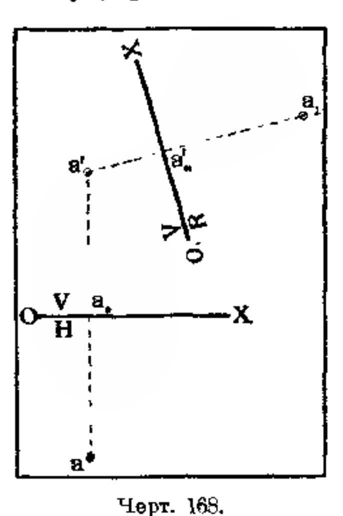
На чертежѣ 167 показанъ случай замѣны H плоскостью R, перпендикулярной къ V. Плоскость R называется *новой горизонтальной плоскостью проекцій*.

Проекціей точки A на эту плоскость будетъ точка a_1, которая называется *новой горизонтальной проекціей точки A* и обозначается малой буквой того же наименованія со значкомъ справа внизу. Совмѣстимъ теперь R съ V, вращая R вправо вокругъ линіи сѣченія R съ V. Предполагая опять, что зритель стоитъ на передней полѣ новой горизонтальной плоскости R, находится въ томъ же углу, гдѣ и точка A и смотритъ на V, мы обозначимъ новую ось буквами O_1X_1 при чемъ O_1 расположимъ, какъ и раньше, слѣва отъ зрителя, а X_1—справа.

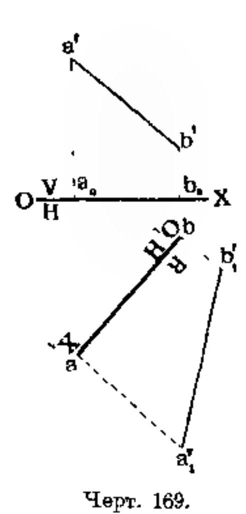
При совмѣщеніи R съ V точка a_1 расположится на линіи $a'a_1$, перпендикулярной къ O_1X_1, въ разстояніи отъ O_1X_1 $a_{01}'a_1$ равномъ $a_0a = a'A$, т. е. въ разстояніи, равномъ удаленію самой точки A отъ плоскости V.

На черт. 168 тѣ же построенія показаны въ проекціяхъ, при чемъ $a_{01}'a_1 = a_0a$ и $a'a_1 \perp O_1X_1$.

Примѣнимъ методъ перемѣны плоскости проекціи къ рѣшенію слѣдующей задачи: Данъ отрѣзокъ AB прямой линіи. Опредѣлить его истинную величину (черт. 169).



Черт. 168.



Черт. 169.

Проведемъ черезъ AB новую плоскость проекцій R, перпендикулярную къ H. Тогда на B отрѣзокъ AR будетъ проектироваться въ натуральную величину. Слѣдъ же Rh плоскости R совпадетъ съ горизонтальной проекціей ab и будетъ служить новой осью проекцій. Совмѣстимъ R съ H, вращая R вокругъ новой оси вправо. Тогда новая ось должна быть обозначена такъ, какъ показано на черт. 169.

Кромѣ того символъ $\frac{R}{H}$ обозначаетъ, гдѣ расположены верхняя пола R и передняя пола H.

Возстановляемъ изъ a и b перпендикуляры къ O_1X_1 и откладываемъ на нихъ вправо отрѣзки $aa_1' = a_0a'$ и $bb_1' = b_0b'$.

Соединяя точки a_1' и b_1', получимъ истинную длину $a_1'b_1'$ отрѣзка AR. Замѣтимъ, что отрѣзки aa_1' и bb_1' мы откладывали вправо потому, что справа расположилась верхняя пола R. Самъ же отрѣзокъ AR лежитъ выше H и, слѣдовательно, проектируется на верхнюю полу всякой плоскости, въ томъ числѣ и R, перпендикулярной къ H.

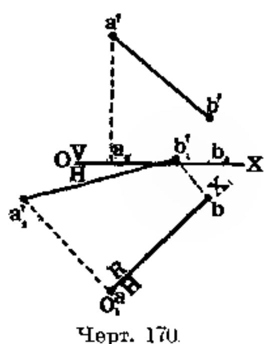
На черт. 170 верхняя пола R откинута влѣво; поэтому и проекція $a_1'b_1'$ расположились слѣва отъ O_1X_1, точно также и буквы, обозначающія

концы новой оси измѣнили свое расположеніе, слѣва O_1, справа X_1. Это показываетъ, что верхняя пола R отбрасывается всегда отъ зрителя, стоящаго на H.

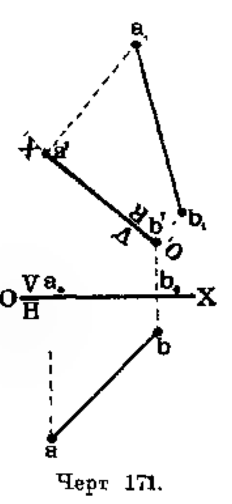
На черт. 171 та же задача рѣшена замѣной плоскости H новой горизонтальной R, причемъ передняя пола плоскости R откинута вправо. Зритель, который предполагается всегда стоящимъ на передней полѣ, увидитъ слѣва отъ себя конецъ оси O_1, а справа — X_1. Такъ какъ точки A и R въ системѣ $\frac{V}{H}$ располагаются передъ V, то въ системѣ $\frac{V}{R}$ онѣ спроектируются на переднюю полу R, т. е. расположатся справа отъ O_1X_1, какъ показано на черт. 171, причемъ

$$a'a_1 = a_0a; \qquad b'b_1 = b_0b.$$

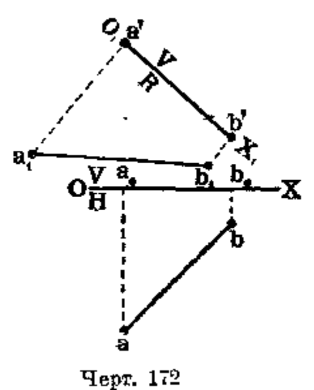
На черт. 172 опять рѣшена та же задача, причемъ передняя пола плоскости R откинута влѣво. Поэтому, для зрителя, стоящаго на этой полѣ, лѣвый конецъ новой оси будетъ обозначенъ буквой O_1, а правый—буквою X_1. Новыя горизонтальныя проекціи a_1b_1 точекъ расположатся теперь слѣва, какъ и показано на чертежѣ.



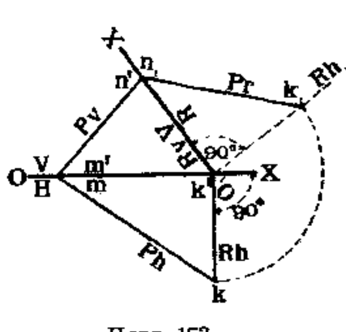
Черт. 170.



Черт. 171.



Черт. 172



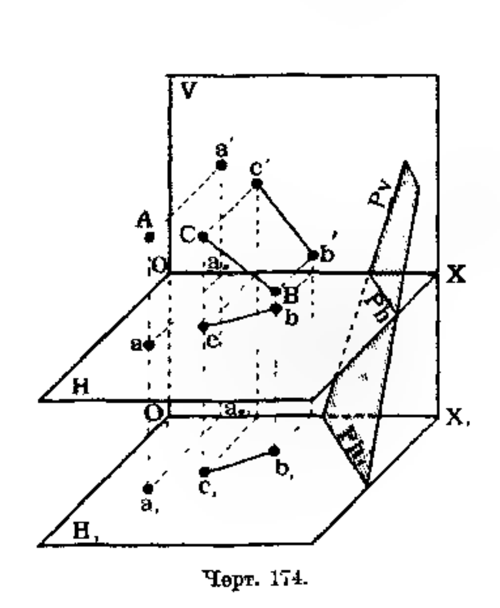
Черт. 173.

Предположимъ теперь (черт. 173), что дана плоскость P ея слѣдами въ системѣ $\frac{V}{H}$. Замѣнимъ плоскость H новой горизонтальной плоскостью R, перпендикулярной къ V, и построимъ слѣды плоскости P въ системѣ $\frac{V}{R}$, при чемъ переднюю полу плоскости R откинемъ вправо.

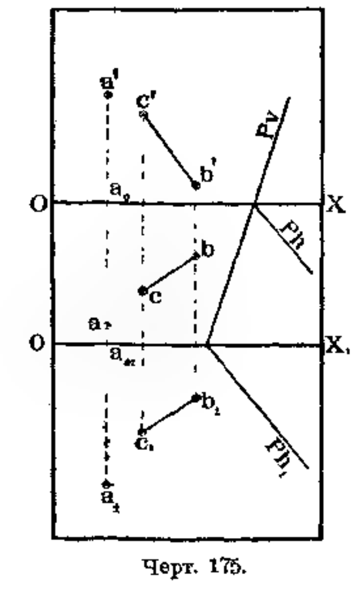
Новою точкою схода слѣдовъ будетъ служить точка n', n_1 пересѣченія слѣда Pv съ новою осью O_1X_1.

Для нахожденія новаго горизонтальнаго слѣда плоскости P достаточно найти хотя бы еще одну его точку. Таковою можетъ служить точка K (k, k) пересѣченія слѣдовъ Ph и Rh, какъ завѣдомо принадлежащая обѣимъ плоскостямъ P и R. Въ пространствѣ слѣдъ Rh перпендикуляренъ къ Rv, такъ какъ $R \perp V$. Послѣ совмѣщенія R съ V, слѣдъ Rh пайдетъ по линіи Rh_1, перпендикулярной къ Rv, и точка k придетъ въ точку k_1', причемъ $k'k = k_1k$.

Соединяя k_1 съ n_1, найдемъ искомый новый горизонтальный слѣдъ Pr плоскости P на плоскости R въ системѣ $\frac{V}{R}$.

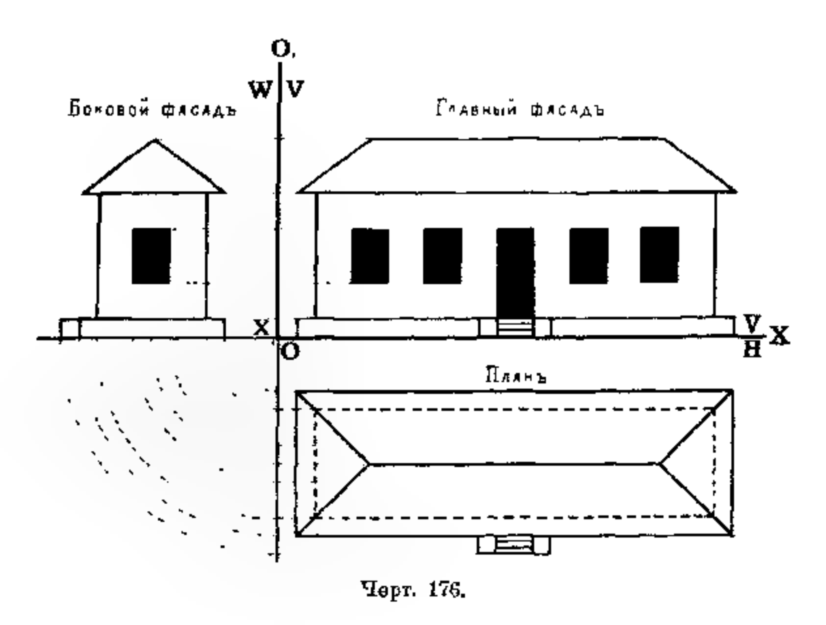


Черт. 174.



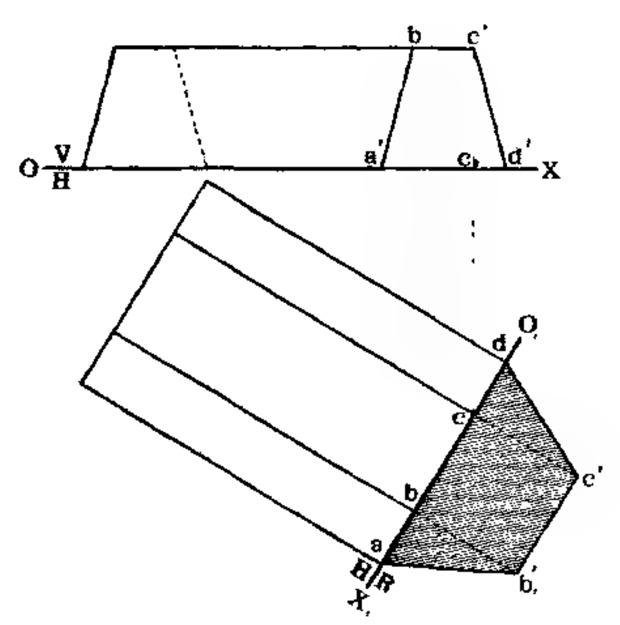
Черт. 175.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, при перемѣнѣ плоскости проекцій, бываетъ выгодно новую плоскость проекцій расположить параллельно старой. Напримѣръ, на чертежѣ 174 проведена новая горизонтальная плоскость проекцій H_1 параллельно H, и показаны новыя горизонтальныя проекціи точки A, прямой BC и новый горизонтальный слѣдъ плоскости P. При такой замѣнѣ всѣ горизонтальныя проекціи точекъ отодвигаются отъ старой оси на величину разстоянія новой плоскости H_1 отъ старой H. Такая перемѣна плоскости проекцій иногда бываетъ полезна, если горизонтальная, и вертикальная проекціи какого-нибудь предмета налегаютъ одна на другую, и желательно для наглядности изображенія отодвинуть ихъ другъ отъ друга. На чертежѣ 175 показаны въ проекціяхъ тѣ построенія, которыя на черт. 174 изображены въ пространствѣ.



Черт. 176.

Аналогичныя построенія получатся, если плоскость *V* замѣнить ей паралельною.



Черт. 177.

На практикѣ часто пользуются методемъ перамѣны плоскостей проекцій для изображенія боковыхъ видовъ или профилей разныхъ предме-

товъ. Напримѣръ, на черт. 176 показаны проекціи дома на V и H или, какъ ихъ называютъ, главный фасадъ и планъ. Проектируя же домъ на профильную плоскость W, перпендикулярную и къ V и къ H, получимъ на W изображеніе бокового фасада дому. Плоскость W совмѣщаемъ съ V, вращая ее вокругъ ея вертикальнаго слѣда, который будетъ служить новой осью проекціи O_1X_1.

Задача № 17.

На чертежѣ 177 изображена часть насыпи желѣзнодорожнаго полотна, ось котораго параллельна H. Опредѣлить профиль, т. е. фигуру нормальнаго сѣченія насыпи.

Рѣшеніе. Мѣняемъ плоскость проекцій V на новую R, которую выбираемъ перпендикулярно къ H и къ оси полотна. Тогда на эту плоскость профиль насыпи спроектируется безъ искаженія. Откидываемъ верхнюю полу R вправо, обозначая новую ось буквами O_1X_1, или символомъ $\frac{R}{H}$. Проектируемъ точки A, B, C, D профиля на R, откладывая

$$bb_1' = cc_1' = e_0c'.$$

Соединяя между собою полученныя точки, получимъ искомый профиль $ab_1'c_1'd$.

---

c) *Перемѣна двухъ плоскостей проекцій.*

Иногда, при опредѣленіи истинной величины какого-нибудь геометрическаго элемента или для полученія нагляднаго изображенія предмета бываетъ необходимо перемѣнить не одну плоскость проекцій, а двѣ.

Въ этомъ случаѣ перемѣна производится послѣдовательно, сначала замѣняютъ одну изъ старыхъ плоскостей проекцій, напримѣръ, V, новой R, перпендикулярной къ оставляемой старой, т. е. къ H. Затѣмъ мѣняютъ вторую старую плоскость проекцій, въ данномъ случаѣ H, на новую, перпендикулярную къ R.

Выборъ новыхъ плоскостей проекцій опредѣляется требованіями задачи и условіемъ, чтобы каждая послѣдующая плоскость проекцій была перпендикулярна къ одной изъ предыдущихъ.

Разсмотримъ, какъ располагаются и опредѣляются проекціи точки при перемѣнѣ двухъ плоскостей проекціи.

Пусть дана точка A и показаны ея проекціи a и a' въ системѣ $\frac{V}{H}$ (черт. 178).

Замѣнимъ плоскость V новой вертикальной R, перпендикулярной къ H, и пусть проекція точки A на R будетъ a_1'.

Очевидно

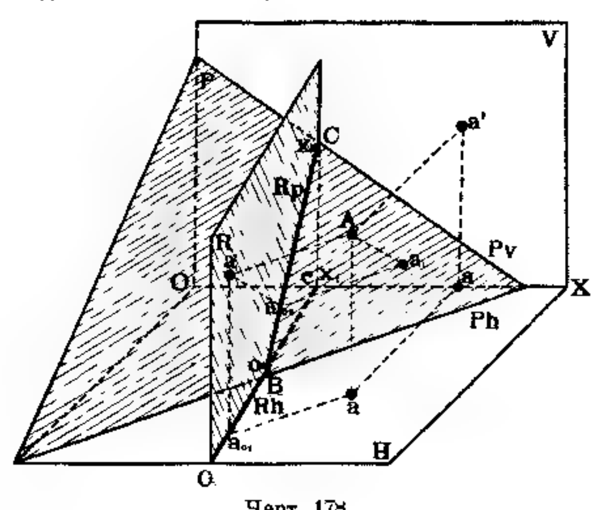
$$a_{01}\,a_1' = Aa = aa'.$$

Проведемъ теперь плоскость P, перпендикулярную къ R, и примемъ ее за новую горизонтальную плоскость, замѣняющую H. Пусть проекція точки A на плоскость P будетъ a_1.

Очевидно

$$a_1 a_{02} = Aa_1' = aa_{01}.$$

Для перехода отъ пространственнаго изображенія къ плоскому необходимо послѣдовательно совмѣщать R съ H и P съ R.



Черт. 178.

Такимъ образомъ мы будемъ послѣдовательно переходить

отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$

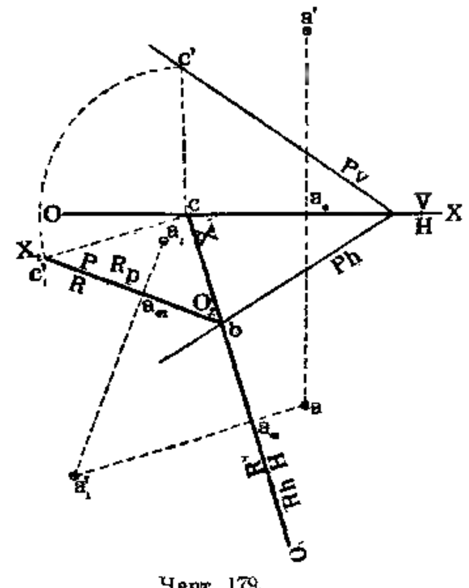
и

» » $\frac{R}{H}$ » » $\frac{P}{R}$

Первою новою осью будетъ служить линія O_1X_1 сѣченія R съ H, т. е. горизонтальный слѣдъ Rh плоскости R.

Совмѣстимъ R съ H, вращая верхнюю полу R влѣво (черт. 179).

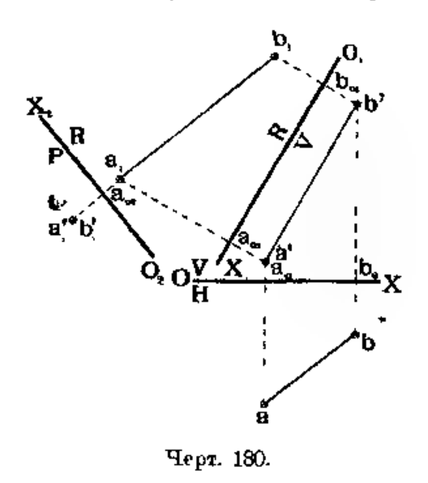
Новая вертикальная проекція a_1' точки A будетъ лежать на перпендикулярѣ опущенномъ изъ a на O_1X_1 по другую сторону оси, такъ какъ точка A лежать выше H и проектируется на верхнюю полу R, а эта пола нами откинута влѣво.



Черт. 179.

Находимъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ проекціи линіи BC сѣченія P съ R. Эта

линія будетъ служить второю осью. Проводимъ $cc_1' \perp O_1X_1$ и откладываемъ $cc_1' = cc'$ Линія bc_1' и будетъ второю осью проекцій. Откидываемъ переднюю полу P вверхъ. При такихъ условіяхъ зритель, стоящій на этой полѣ увидитъ слѣва отъ себя конецъ O_2 оси, а справа X_2. Новая горизонтальная проекція точки A будетъ лежать на перпендикулярѣ къ O_2X_2, опущенномъ изъ a_1'. Такъ какъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ точка A лежала передъ R, то, слѣдовательно, она спроектируется на переднюю полу P, которая нами откинута вверхъ.



Черт. 180.

Поэтому новая горизонтальная проекція a_1 расположится сверху оси O_2X_2 и въ разстояніи отъ нея $a_{02}a_1$ равномъ aa_{01}, т. е. разстоянію точки A до R.

Разсмотримъ примѣненіе этого метода на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Дана прямая AR (черт. 180). Перемѣнить плоскости проекцій такъ, чтобы она спроектировалась въ точку.

Для рѣшенія задачи мѣняемъ плоскости проекцій слѣдующимъ образомъ: отъ системы $\frac{V}{H}$ переходимъ къ системѣ $\frac{V}{R}$. при чемъ R выбираемъ перпендикулярно къ V и параллельно AR. Строимъ новую горизонтальную проекцію a_1b_1 прямой, откидывая переднюю полу R влѣво и откладывая $b_{01}b_1 = bb_0$ и $a_{01}a_1 = aa_0$. Отъ системы $\frac{V}{R}$ переходимъ къ системѣ $\frac{R}{P}$, при чемъ P выбираемъ перпендикулярно къ R и AR. При такихъ условіяхъ прямая AR спроектируется на P въ видѣ точки.

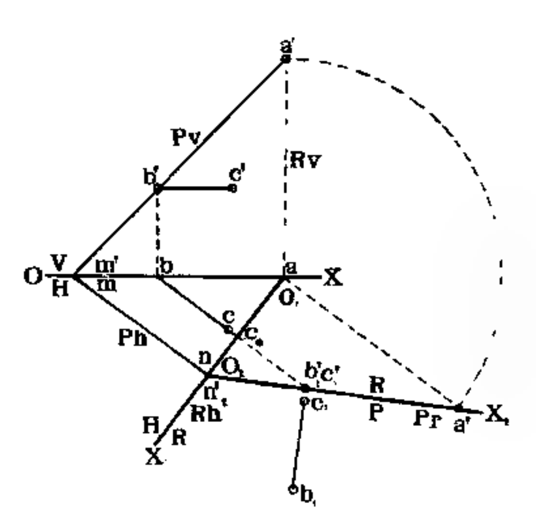
Откидываемъ верхнюю полу P влѣво; такъ какъ точки A и R въ системѣ $\frac{V}{R}$ лежали выше R, то онѣ спроектируются на верхнюю полу P, т. е. слѣва; откладывал $a_{02}a_1' = a_{01}a'$, получимъ точку $a_1'b_1'$, искомую проекцію прямой AB.

На чертежѣ 181 показанъ примѣръ рѣшенія слѣдующей задачи. Дана плоскость P и въ ней горизонталь RC. Перейти къ новой системѣ плоскостей проекцій, изъ которыхъ одна была бы плоскостью P.

Для рѣшенія задачи проводимъ промежуточную плоскость R перпендикулярную къ H и къ P; при этомъ Rh будетъ перпендикулярно къ Ph, а $Rv \perp OX$. Переходимъ послѣдовательно отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$ и далѣе къ $\frac{R}{P}$.

Принимаемъ слѣдъ Rh за первую новую ось O_1X_1, откидываемъ

верхнюю полу R вправо и строимъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ новую вертикальную проекцію $b_1'c_1'$ горизонтали, которая, будучи параллельной Ph, т. е. перпендикулярной къ R, спроектируется на R въ видѣ точки.



Черт. 181.

Черезъ эту точку, и черезъ новую точку схода слѣдовъ N долженъ пройти слѣдъ Pr плоскости P на R.

Очевидно линія Pr пройдетъ и черезъ точку a_1', проекцію на R точки A пересѣченія слѣдовъ Rv и Pv.

Принимаемъ линію Pr за новую вторую ось O_2X_2 и откидываемъ переднюю полу R внизъ. Такъ линія RC въ системѣ $\frac{R}{H}$ лежала на передней полѣ P, то ея новая горизонтальная проекція расположится подъ осью O_2X_2.

Откладываемъ $c_1c_1' = cc_0$ и $bb_1' = c_0b$. Линія b_1c_1 и будетъ проекцией RC на плоскость P въ системѣ $\frac{R}{P}$.

Рѣшимъ такую задачу (черт. 182).

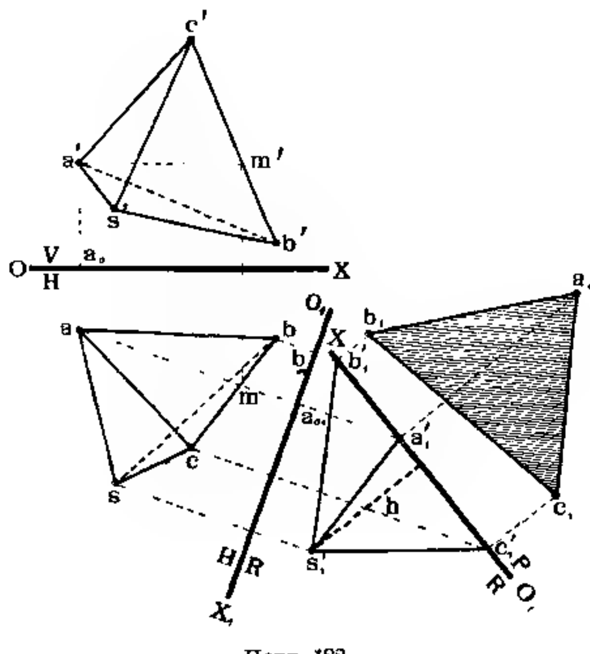
Дана пирамида $SABC$. Перемѣнить плоскость проекцій такъ, чтобы основаніе ABC и высота пирамиды въ новой системѣ проектировались безъ искаженія.

Для того, чтобы высота пирамиды проектировалась безъ искаженія, необходимо, чтобы плоскость проекцій была перпендикулярна къ основанію ABC пирамиды. Для того же, чтобы основаніе ABC проектировалось безъ искаженія, плоскость проекцій должна быть параллельна основанію, или совпадать съ нимъ.

Обозначимъ плоскость проекцій перпендикулярную къ ABC черезъ R,

а самую плоскость ARC черезъ P. Итакъ, мы имѣемъ систему $\frac{P}{R}$, въ которой требуемые элементы будутъ проектироваться безъ искаженія, причемъ $R \perp P$.

Проводимъ въ плоскости ARC горизонталь AM и выбираемъ плоскость R перпендикулярной къ этой горизонтали. При такихъ условіяхъ плоскость B будетъ перпендикулярна къ H и къ ARC. Очевидно, что основаніе ABC спроектируется на R въ прямую линію.



Черт. 182.

Переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, откидывая верхнюю полу R вправо.

Новыя вертикальныя проекціи пирамиды будутъ $a_1'b_1'c_1's_1'$. Разстояніе h точки s_1' до линіи $b_1'c_1'$ и будетъ выражать высоту пирамиды.

Принимаемъ линію $b_1'c_1'$, какъ линію сѣченія плоскостей P и R за вторую новую ось O_2X_2 и откидываемъ переднюю полу P вправо вверхъ. Строимъ новую горизонтальную проекцію $a_1b_1c_1$ основанія $ARC(a_1'a_1 = a_{01}a$, $b_1'b_1 = b_{01}b$ и т. д.). Фигура $a_1b_1c_1$ и даетъ истинный видъ основанія ARC.

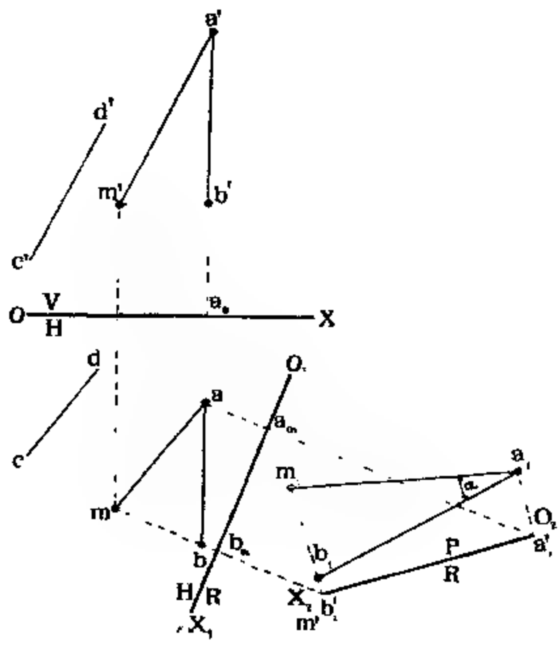
На черт. 183 рѣшена слѣдующая задача:

Опредѣлить уголъ между двумя не параллельными и не пересѣкающимися линіями AB и CD.

Для рѣшенія задачи проведемъ черезъ точку A линію AM, парал-

лельную CD, и будемъ опредѣлять уголъ MAB, который одинаковъ съ угломъ между линіями AB и CD. Задача сводится къ тому, чтобы спроектировать плоскій уголъ MAB на плоскость параллельную ему, или же перейти къ такой системѣ плоскостей проекціи, въ которой одною изъ плоскостей была бы плоскость угла MAB.

Подобная задача была уже рѣшена на черт. 182. Рѣшаемъ нашу задачу подобнымъ же образомъ:



Черт. 183.

Проводимъ въ плоскости угла MAB горизонталь RM и выбираемъ первую новую плоскость проекцій B перпендикулярной къ BM. Строимъ новую вертикальную проекцію $m_1'a_1'b_1'$ угла MAB въ системѣ $\frac{B}{H}$. Очевидно, уголъ MAB спроектируется въ прямую линію. Принимаемъ эту линію за вторую новую ось O_2X_2 и строимъ новую горизонтальную проекцію $m_1a_1b_1$ угла въ системѣ $\frac{P}{R}$, гдѣ P есть плоскость угла MAB.

Уголъ $m_1a_1b_1$ и будетъ равенъ искомому углу между линіями AB и CB.

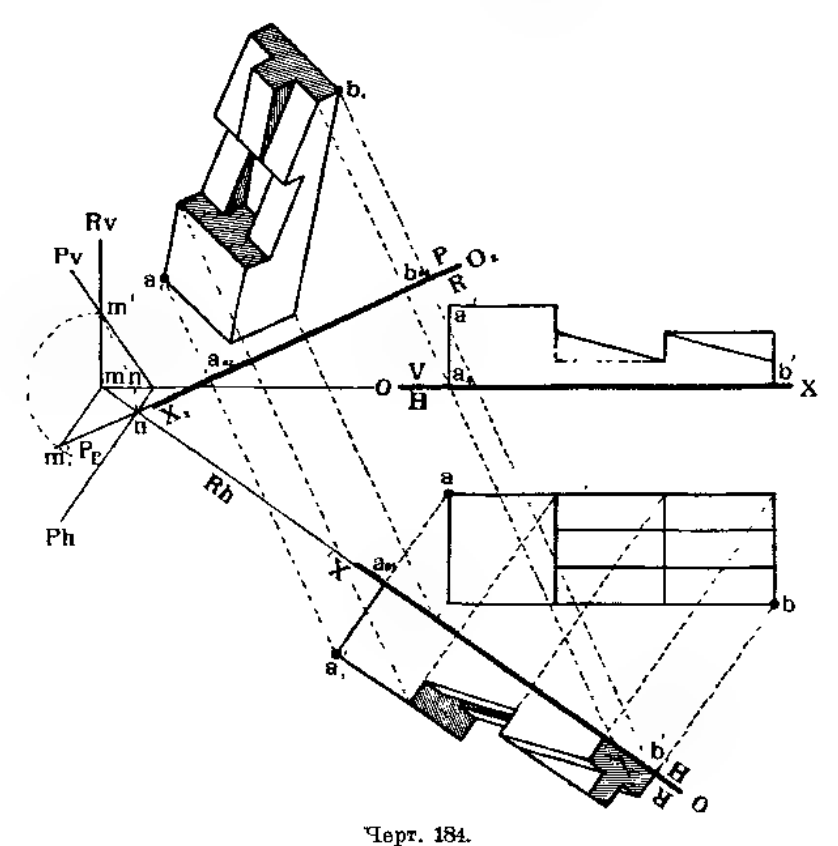
Задача № 18.

На черт. 184 показаны проекціи врубки деревяннаго бруса въ системѣ $\frac{V}{H}$. Такъ какъ это изображеніе недостаточно наглядно, то требуется построить проекцію того же бруса на плоскость P, наклонную и къ H и къ V.

Рѣшеніе.

Для перехода отъ системы $\frac{V}{H}$ къ новой, въ которой одной изъ плоскостей проекцій была бы плоскость P, проводимъ промежуточную плоскость $R \perp H$ и $\perp P$.

Строимъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ новую вертикальную проекцію бруса, откидывая верхнюю полу R влѣво внизъ. На чертежѣ между прочимъ показано построеніе точки a_1' ($a_1'a_{01} = a_0a'$). Въ этой же системѣ строимъ слѣдъ Pr плоскости P на R, для чего проводимъ $mm_1' \perp Rh$ и откладываемъ $mm_1' = mm'$, гдѣ точка M является точкой пересѣченія слѣдовъ Rv и Pv. Соединяя точку m_1' съ новой точкой схода



Черт. 184.

слѣдовъ n, получимъ слѣдъ Pr, который и принимаемъ за вторую новую ось O_2X_2. Откидываемъ переднюю полу P вверхъ влѣво и строимъ новую горизонтальную проекцію бруса (напримѣръ, $a_{02}a' = aa_{01}$; $b_{02}b_1 = bb_1'$ и т. д.), которая даетъ наглядное изображеніе формы врубки.

---

§ 12. Пересѣченіе многогранниковъ.

Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію задачи на пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ, необходимо умѣть рѣшить три задачи въ слѣдующей послѣдовательности:

Найти точку пересѣченія прямой линіи съ плоскостью.

Построить линію сѣченія многогранника съ плоскостью.

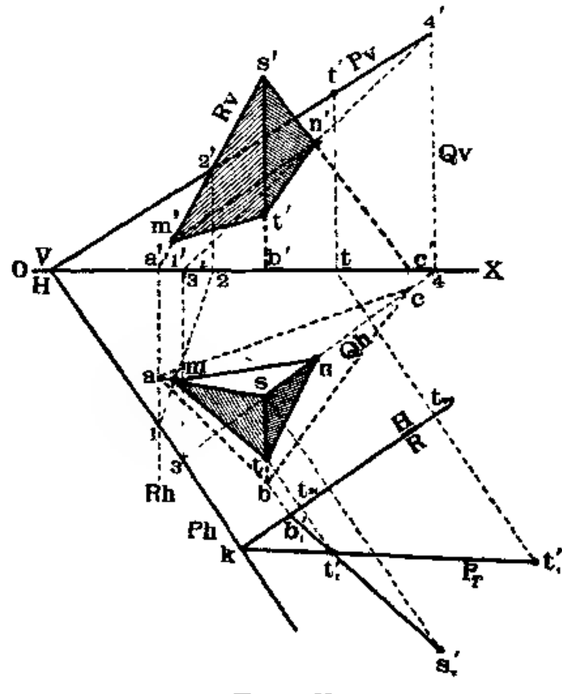
Построить точки пересѣченія многогранника съ прямою линіей.

Рѣшеніе первой изъ этихъ задачъ уже было приведено нами ранѣе (теорема 13, стр. 53).

Поэтому переходимъ къ рѣшенію двухъ другихъ задачъ.

а) Пересѣченіе многогранника съ плоскостью.

Эту задачу можно свести къ задачѣ на пересѣченіе линіи съ плоскостью. Дѣйствительно, если мы найдемъ всѣ точки, въ которыхъ ребра многогранника пересѣкаютъ данную плоскость, и послѣдовательно соединимъ ихъ между собою, то мы и получимъ искомую линію сѣченія.



Черт. 185.

Прослѣдимъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Даны: пирамида $SABC$ и плоскость P. Найти линію ихъ сѣченія (черт. 185).

Для рѣшенія этой задачи находимъ послѣдовательно точки пересѣченія реберъ SA, SB и SC пирамиды съ плоскостью P.

Для опредѣленія точки пересѣченія ребра SA съ P проводимъ черезъ

SA плоскость $R \perp V$ и находимъ линію **12** сѣченія R съ P; точка M пересѣченія **12** съ AR и будетъ искомой.

Для опредѣленія точки пересѣченія ребра SC съ P проводимъ черезъ SC плоскость $Q \perp H$ и находимъ линію **34** сѣченія Q съ P.

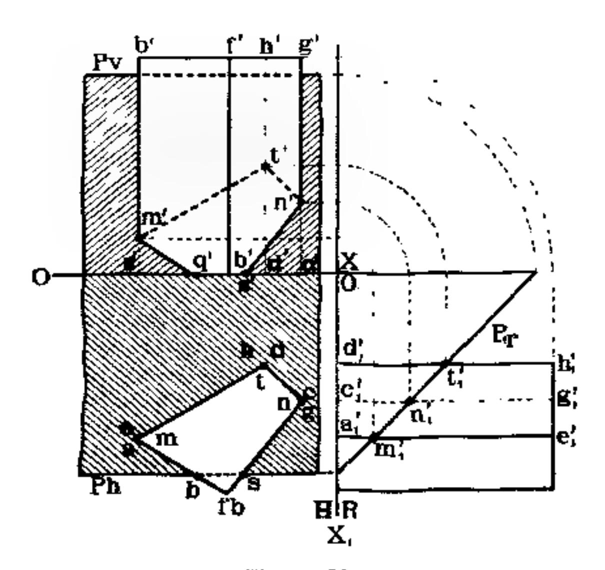
Точка N пересѣченія линій **34** и SC и будетъ искомой.

Для опредѣленія точки пересѣченія ребра SR пирамиды, которое случайно задано профильнымъ, съ плоскостью P, перемѣнимъ плоскость проекцій V на новую R, перпендикулярную къ H и къ P, спроектируемъ линію SR на R и найдемъ слѣдъ P на R въ системѣ $\frac{R}{H}$

Такъ какъ $P \perp R$, то точка t_1' пересѣченія $b_1's_1'$ съ Pr будетъ новой вертикальной проекціей точки пересѣченія SB съ P. Переносимъ точку t_1' въ систему $\frac{V}{H}$ и соединяемъ между собой полученныя точки M, N и T. Линія MNT и будетъ искомой линіей сѣченія пирамиды съ плоскостью.

Даны: призма $ABCDEFGH$ и плоскость $P \parallel OX$. Найти линію ихъ сѣченія (черт. 186).

Мѣняемъ плоскость V на $R \perp OX$ и строимъ проекцію призмы и слѣдъ плоскости P на плоскости R. Такъ какъ $P \perp R$, то линія сѣче-



Черт. 186.

нія призмы съ P спроектируется на R въ линію, совпадающую съ Pr. Отмѣчаемъ въ проекціи на R точки m_1', n_1', t_1' пересѣченія реберъ призмы съ Pr и переносимъ ихъ въ систему $\frac{V}{H}$. Кромѣ того, въ системѣ $\frac{V}{H}$

замѣчаемъ точки Q и S пересѣченія контура основанія призмы съ слѣдомъ Ph.

Линія $QMTNS$ и будетъ искомой.

b) Пересѣченіе многогранника съ прямой линіей.

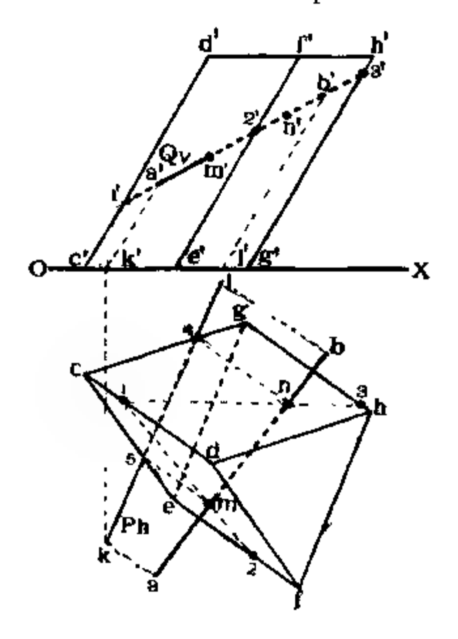
Эта задача сводится къ задачѣ на пересѣченіе многогранника съ плоскостью.

Дѣйствительно, проведемъ черезъ данную прямую какую-нибудь плоскость и найдемъ линію сѣченія этой плоскости съ многогранникомъ. Точки пересѣченія найденной линіи съ данной прямой и будутъ искомыми.

Разсмотримъ примѣненіе этого метода на примѣрахъ.

Дана наклонная призма $CDEFGB$ и прямая AD (черт. 187). Найти точки ихъ пересѣченія.

Проведемъ черезъ AB плоскость Q перпендикулярную къ V; при этомъ Qv сольется съ $a'b'$. Найдемъ точки **1, 2** и **3** пересѣченія реберъ CD, EF и GH призмы съ плоскостью Q. Линіи **12** и **13** будутъ служить линіями сѣченія граней призмы $CDEF$ и $CDGH$ съ плоскостью Q. Точки же M и N пересѣченія данной линіи AB съ линіями **12** и **13** и будутъ искомыми.



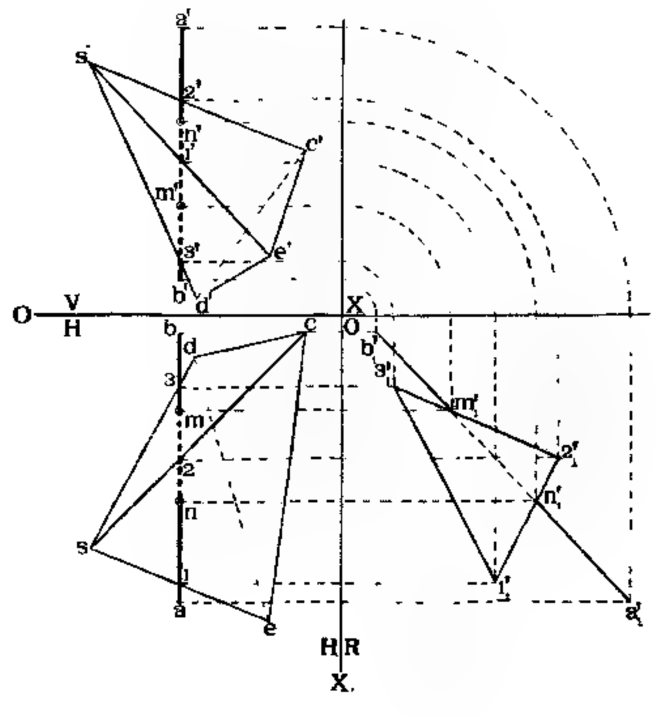
Черт. 187.

Ту же задачу можно рѣшить и иначе. Проведемъ черезъ AB плоскость P, параллельную ребрамъ CD, GH, EF призмы.

Для опредѣленія плоскости P достаточно черезъ точки A и B провести линіи AK и BL, параллельныя ребрамъ призмы. Соединяя горизонтальныя слѣды K и L этихъ линій, получимъ горизонтальный слѣдъ Ph вспомогательной плоскости P. Слѣдъ этотъ пересѣкаетъ основаніе CEG призмы въ точкахъ 4 и 5. Проводимъ черезъ эти точки линіи $4N$ и $M5$ параллельныя ребрамъ призмы. Эти линіи будутъ, очевидно, являться линіями сѣченія плоскости P съ призмой.

Точки M и N пересѣченія этихъ линій съ AB и будутъ искомыми.

Дана пирамида $SDCE$ и профильная линія AR (черт. 188). Найти точки ихъ пересѣченія.



Черт. 188.

Проведемъ черезъ AR профильную плоскость и отмѣтимъ въ системѣ $\frac{V}{H}$ точки **1**, **2**, **3** пересѣченія этой плоскости съ ребрами пирамиды. Искомыми точками будутъ, очевидно, служить точки пересѣченія линіи AB съ ломаной линіей **123**.

Для нахожденія этихъ точекъ перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, причемъ R выбираемъ параллельно упомянутой профильной плоскости. Строимъ въ проекціи на R сѣченіе **123** и линію AB. Точки n_1' и m_1' пересѣченія $a_1'b_1'$ съ $1_1'2_1'$ и съ $2_1'3_1'$ и будутъ проекціями искомыхъ точекъ.

Остается ихъ лишь перенести въ систему $\frac{V}{H}$.

c) *Пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ.*

Эта задача основывается на предыдущихъ, и для рѣшенія ея поступаютъ слѣдующимъ образомъ:

Находятъ сначала точки пересѣченія реберъ одного тѣла съ гранями

другого, затѣмъ реберъ второго съ гранями перваго, и полученныя точки послѣдовательно соединяютъ другъ съ другомъ.

Для облегченія рѣшенія этой задачи рекомендуется придерживаться такого плана:

1) Опредѣленіе сначала видимыхъ частей каждаго тѣла въ отдѣльности, независимо отъ другого и вычерчиваніе видимыхъ реберъ сплошной чертой, а невидимыхъ—пунктиромъ.

2) Опредѣленіе такихъ реберъ каждаго тѣла, которыя завѣдомо не пересѣкаютъ граней другого.

3) Опредѣленіе точекъ пересѣченія реберъ перваго тѣла съ гранями второго.

4) Опредѣленіе точекъ пересѣченія реберъ второго тѣла съ гранями перваго.

5) Послѣдовательное соединеніе между собою найденныхъ точекъ. При этомъ соединяются другъ съ другомъ тѣ точки, которыя лежатъ на однѣхъ и тѣхъ же граняхъ каждаго тѣла. Линія, соединяющая эти точки и будетъ линіей сѣченія многогранниковъ.

6) Опредѣленіе видимости линіи сѣченія. Видимыми частями этой линіи въ каждой проекціи будутъ тѣ, которыя принадлежатъ пересѣкающимся видимымъ въ этой проекціи гранямъ обоихъ тѣлъ. Если же въ какой нибудь проекціи хотя бы одна изъ граней будетъ невидима, то и линія сѣченія, лежащая въ этой грани, будетъ невидима.

7) Окончательное опредѣленіе видимости пересѣкающихся тѣлъ. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что ребра одного тѣла, лежащія внутри другого, будутъ невидимыми.

Прослѣдимъ рѣшеніе задачи на пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Даны двѣ пирамиды $SABC$ и $TPQR$ (черт. 189).

Найти линіи ихъ сѣченія.

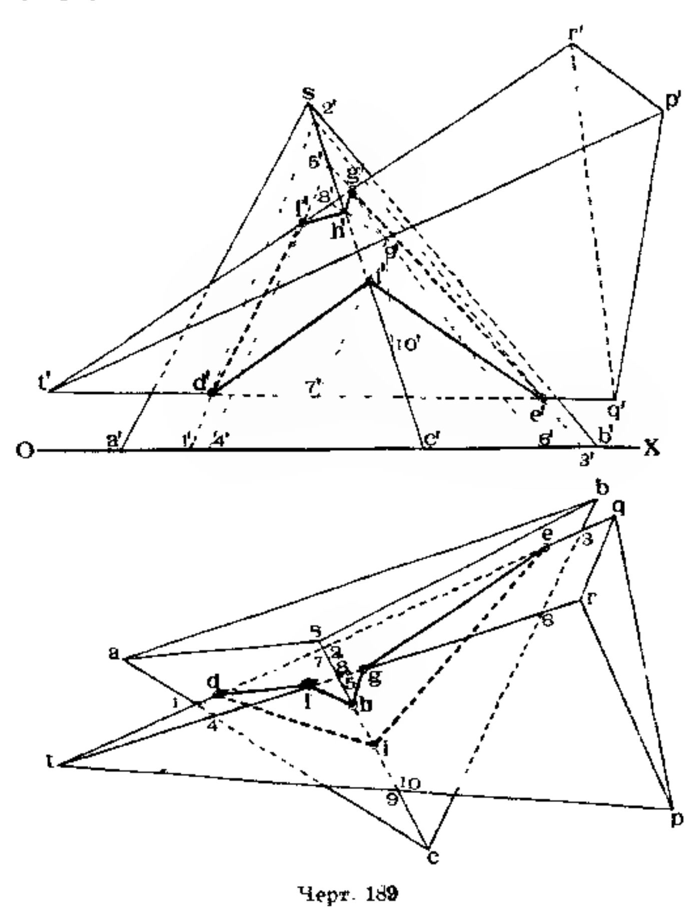
Опредѣливъ видимость каждой пирамиды въ отдѣльности, какъ это было уже объяснено ранѣе (§ 8, стр. 60), выяснимъ, какія ребра каждаго тѣла завѣдомо не пересѣкаютъ граней другого. Къ таковымъ ребрамъ принадлежатъ тѣ, проекціи которыхъ на V или на H лежатъ внѣ контура проекціи на ту же плоскость другого тѣла.

Въ нашемъ случаѣ таковыми ребрами являются SA, SB, AB, AC, BC, RQ. BP, QP. Слѣдовательно, можетъ идти рѣчь о нахожденіи точекъ пересѣченія ребра SC съ пирамидой $TPQB$ и реберъ TQ, TB и TP съ пирамидой $SABC$.

Однако, нетрудно замѣтить, что ребро TP не пересѣкаетъ граней пирамиды $SABC$, такъ какъ точка **9** его лежитъ выше точки **10** ребра SC и въ тоже время ребро TP не пересѣкаетъ основаніе ABC внутри контура послѣдняго.

Остается, слѣдовательно искать пересѣченіе реберъ TQ и TR съ гранями пирамиды $SABC$ и ребра SC съ гранями пирамиды $TPQB$.

Такъ какъ tq лежитъ внѣ контура asb, а $t'q'$ — внѣ контура $a'c'b'$, то ребро TQ можетъ пересѣкаться лишь съ гранями SAC и SBC. Для опредѣленія этихъ точекъ пересѣченія проводимъ черезъ TQ плоскость перпендикулярную къ H и находимъ линію **123** сѣченія ея съ SAC и



Черт. 189

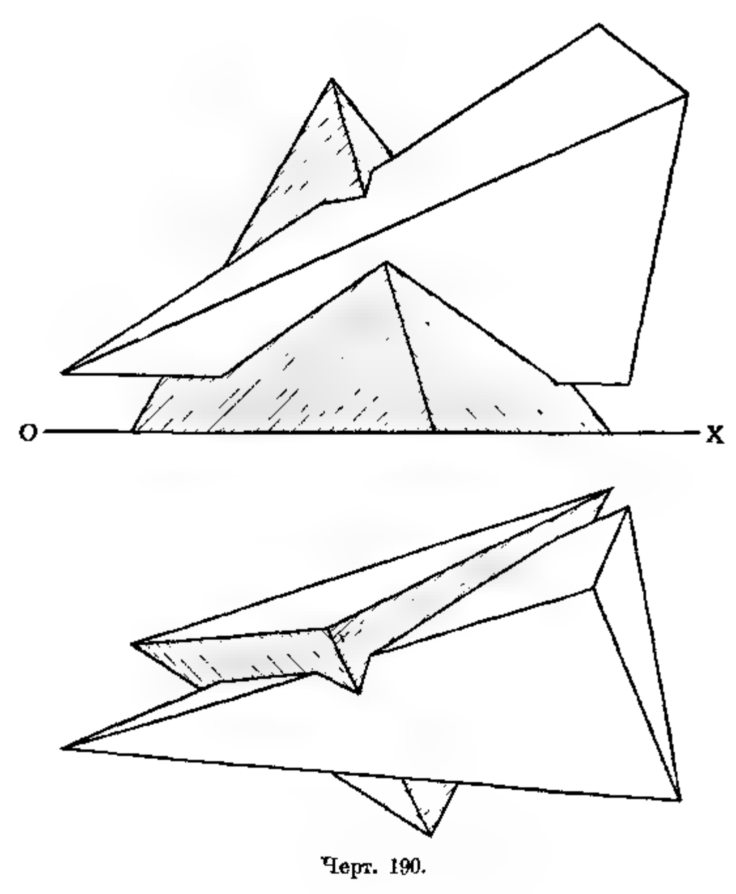
SRC. Точки D и E пересѣченія ребра TQ съ линіями **12** и **23** и будутъ служить точками пересѣченія ребра TQ съ пирамидой $SABC$.

Подобнымъ же образомъ находимъ и точки F и G пересѣченія ребра TB съ пирамидой $SABC$ и точки B и I пересѣченія ребра SC съ пирамидой $TPQR$.

Остается теперь соединить между собой полученныя точки.

Точки D и F лежатъ на грани SAC и на грани TQB; поэтому соединяемъ ихъ другъ съ другомъ. При этомъ ливію df проводимъ

сплошной чертой, такъ какъ обѣ грани SAC и TQR видимы, если смотрѣть на H. Наоборотъ, вертикальная проекція $d'f'$ будетъ вычерчена пунктиромъ, такъ какъ DF лежитъ на невидимой грани TQR если смотрѣть на V.



Черт. 190.

Руководствуясь подобными же соображеніями, соединяемъ между собою остальныя точки и получаемъ искомую линію $DFHGEID$ сѣченія двухъ пирамидъ.

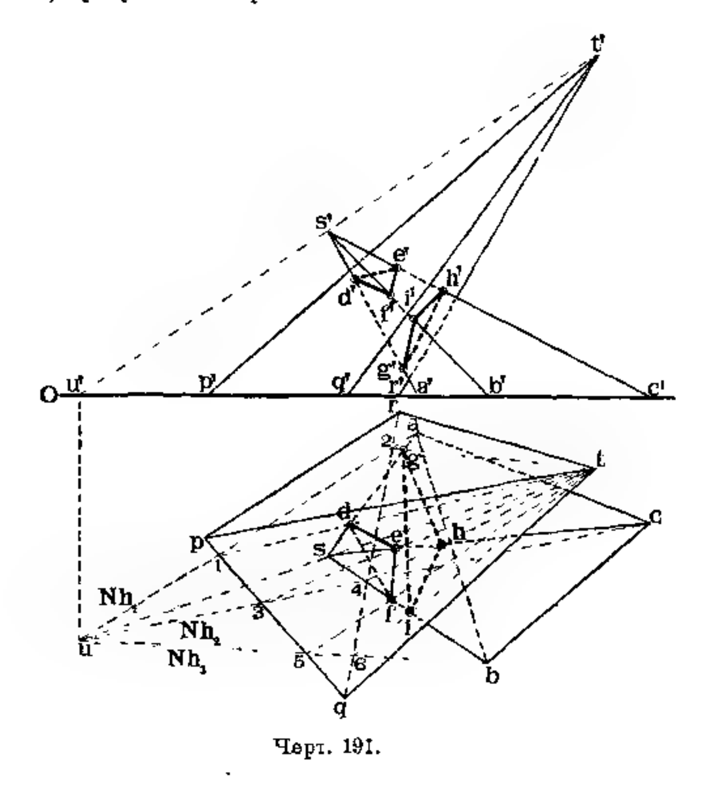
На черт. 190 тѣ же пирамиды изображены съ показаніемъ лишь видимыхъ частей ихъ.

Рѣшимъ теперь задачу на пересѣченіе двухъ пирамидъ нѣсколько инымъ способомъ, именно, будемъ проводить вспомогательныя плоскости черезъ каждое ребро не перпендикулярно на плоскости проекцій, а такъ, чтобы всѣ эти плоскости проходили черезъ линію, соединяющую вершины пирамидъ.

Этотъ способъ удобно примѣнять тогда, когда основанія пирамидъ

лежать въ одной плоскости, а линія вершинъ эту плоскость пересѣкаетъ.

Пусть, напримѣръ, даны двѣ пирамиды $SABC$ и $TPQR$ (черт. 191), стоящія на H, требуется построить линію ихъ сѣченія.



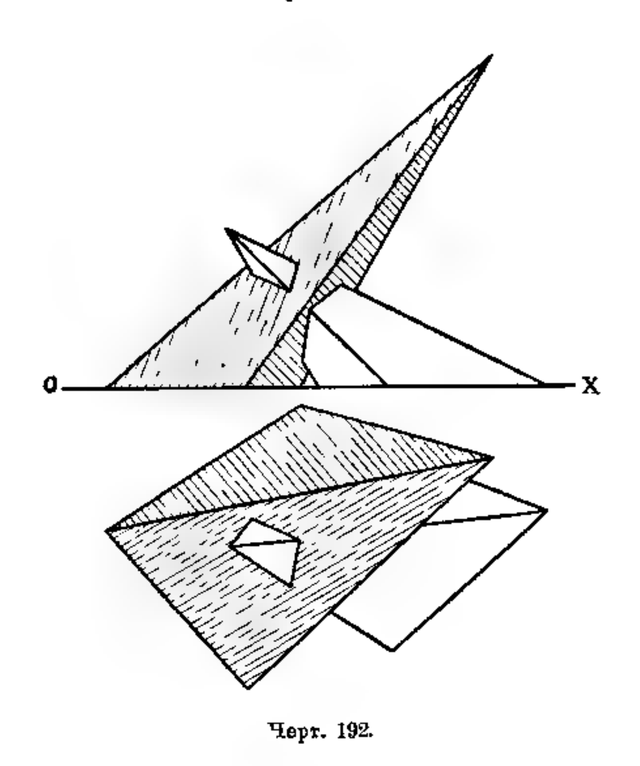
Черт. 191.

Соединяемъ вершины S и T и находимъ горизонтальный слѣдъ U линіи ST. Проведемъ черезъ линію ST и ребро SA плоскость N_1, горизонтальнымъ слѣдомъ Nh_1 этой плоскости будетъ линія, соединяющая точки a и u, и находимъ точки 1 и 2 пересѣченія сторонъ PQ и RP съ Nh_1.

Линіи T**1** и T**2**, соединяющія точку S съ точками **1** и **2**, будутъ служить линіями сѣченія граней TPQ и TBQ пирамиды съ плоскостью N_1, а точки D и G пересѣченія линіи SA съ линіями T**1** и T**2** будутъ служить точками пересѣченія ребра SA съ гранями TPQ и TRQ.

Подобнымъ же образомъ находимъ и точки E и H пересѣченія ребра SC съ гранями TPQ и TQR, для чего служитъ вспомогательная плоскость N_2 и линіи T**3** и T**4**. Наконецъ, находимъ точки F и I пересѣченія ребра SB съ гранями TPQ и TRQ, для чего служитъ вспомогательная плоскость N_3 и линіи T**5** и T**6**. Соединяя между собой точки

D, E, F и G, H, I получимъ линію GHI входа въ пирамиду $TPQR$ и линію DEF—выхода изъ нея пирамиды $SABC$.



Черт. 192.

На черт. 192 показаны отдѣльно видимыя части обѣихъ пирамидъ.

Даны двѣ призмы $ABCDEF$ и $GHIKLM$ стоящія на H. Построить линію ихъ сѣченія (черт. 193).

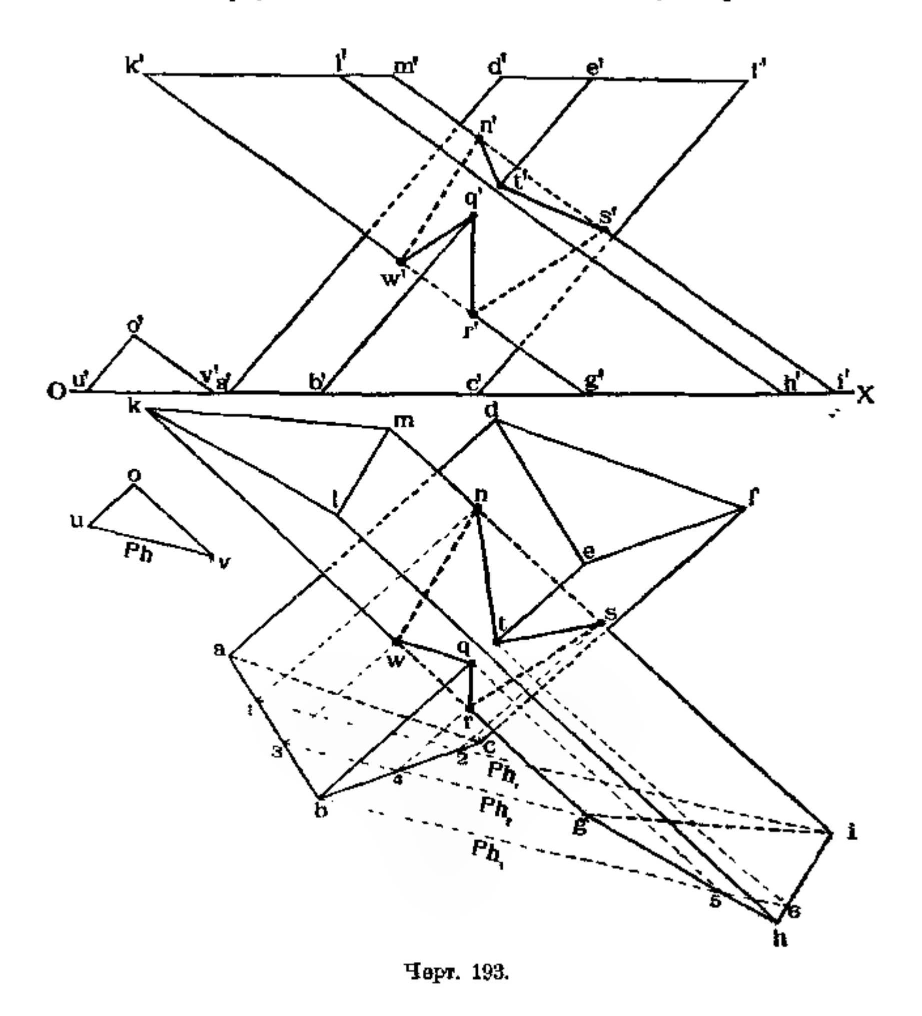
Въ качествѣ вспомогательныхъ плоскостей, которыя мы будемъ проводить черезъ ребра каждой призмы, выберемъ такія, которыя были бы параллельны ребрамъ другой призмы. Найдемъ направленіе горизонтальныхъ слѣдовъ этихъ плоскостей. Для этого черезъ случайную точку O проведемъ линіи OU и OV, параллельныя ребрамъ призмъ.

Соединяя горизонтальные слѣды U и V этихъ линій получимъ направленіе Ph горизонтальныхъ слѣдовъ упомянутыхъ плоскостей.

Найдемъ теперь точки пересѣченія ребра MI съ призмой $ABCDEF$.

Проводимъ черезъ ребро MI плоскость P_1, параллельную ребрамъ другой призмы.

Горизонтальный слѣдъ Ph_1 этой плоскости пройдетъ черезъ точку i параллельно Ph. Замѣтимъ точки 1 и 2 пересѣченія Ph_1 съ ab и bc и проведемъ линіи **1**N и **2**S параллельно ребрамъ призмы $ABCDEF$. Линіи **1**N и **2**S будутъ линіями сѣченія плоскости P_1 съ гранями $ABDE$



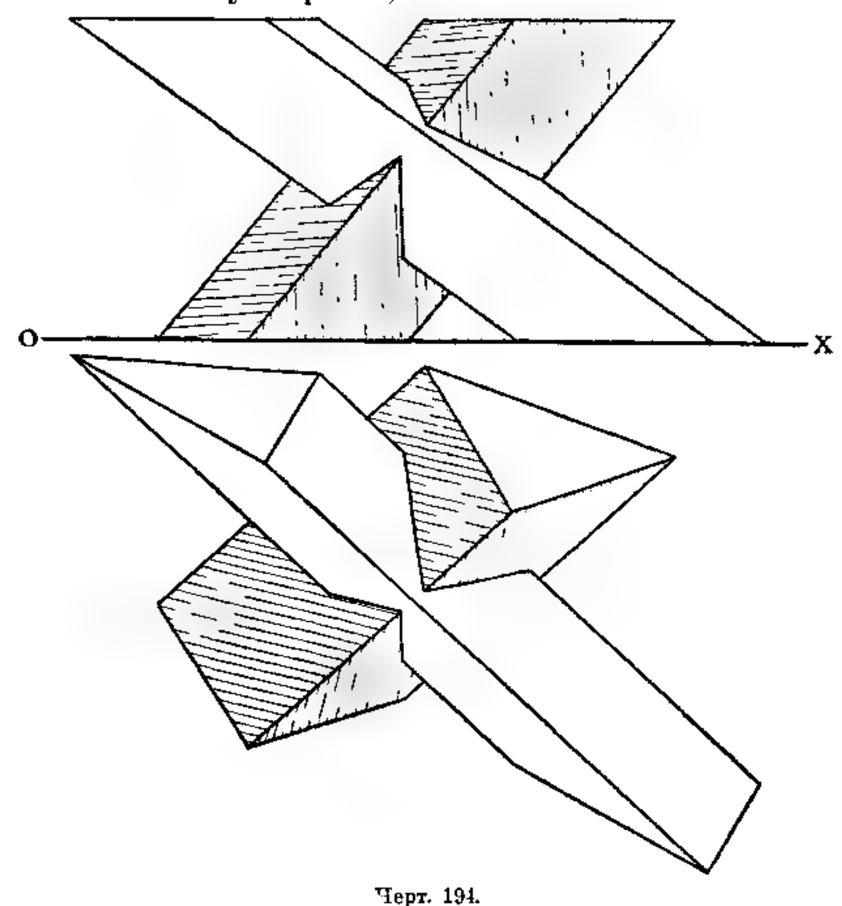
Черт. 193.

и $BCEF$. Точки же N и S пересѣченія этихъ линій съ ребромъ MI будутъ служить точками пересѣченія ребра MI съ призмой $ABCDEF$.

Подобнымъ же образомъ находимъ точки W и R пересѣченія ребра KG съ гранями $ABDE$ и $BCEF$, для чего служитъ вспомогательная плоскость P_2 и линіи **3**W и **4**R.

Наконецъ, находимъ точки Q и T пересѣченія ребра RG съ гранями $KIGH$ и $LMHI$, для чего служитъ вспомогательная плоскость P_3 и линіи **5**Q и **6**T.

Соединяя послѣдовательно полученныя точки, получаемъ искомую линію сѣченія $NTSRQW$ призмъ[1]).



Черт. 194.

На черт. 194 показаны видимыя части пересѣкающихся призмъ.

[1]) Существуетъ рядъ механическихъ способовъ, позволяющихъ довольно быстро, вѣрно и безъ работы воображенія соединять между собою полученныя точки, принадлежащія линіи сѣченія многогранниковъ. Мы этихъ способовъ здѣсь не приводимъ, такъ какъ имѣемъ въ виду необходимость для читателя развивать свое воображеніе, не пользуясь упомянутыми механическими способами. Желающіе же могутъ однако найти описаніе этихъ способовъ въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

1. Д. Анановъ. „Механическій способъ соединенія точекъ при пересѣченіи многранниковъ". СПБ. 1910.

2. R. Bricard. „Géométrie Descriptive". Paris. 1911. Pg. 53.

3. Locht-Labye. „Précis du Cours de Géométrie Descriptive". Liege. Prt. I. Pg. 100.

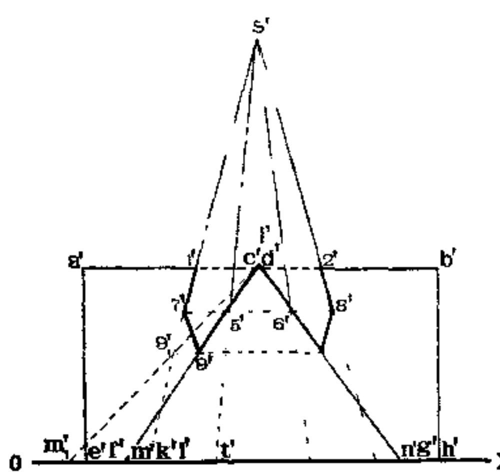
4. R. Hausner. „Darstellende Geometrie". Leipzig 1908. Th. I. St. 196.

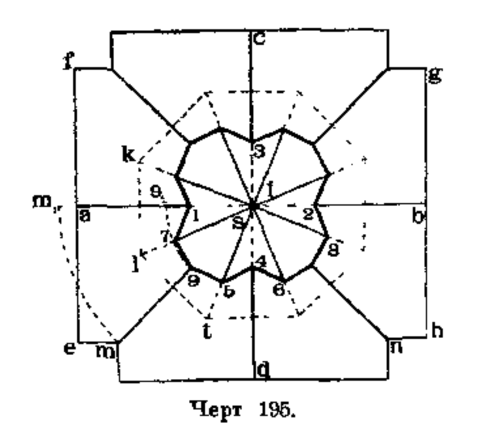
5. R. Sturm. „Elemente der Darstellenden Geometrie". Leipzig. 1900. St. 114.

6. I. Badon Ghijben. „Gronden der Beschrijvende Meetkunde". Breda. 1906. Eerste deel 130.

Задача № 19.

На чертежѣ 195 даны проекціи трехъ крышъ. двухъ—двускатныхъ и одной—пирамидальной Построить линіи ихъ сѣченія.





Черт 195.

Рѣшеніе.

Опредѣляемъ линіи сѣченія крышъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

Прежде всего находимъ линіи сѣченія скатовъ двускатныхъ крышъ, т. е. четыре линіи типа *MI*. Затѣмъ, имѣя въ виду, что лѣвая и правая грани пирамиды перпендикулярны къ *V*, находимъ точки **1** и **2** пересѣченія съ этими гранями конька *AB*. Точки **3** и **4** пересѣченія конька *CD* расположатся на *CD* такъ же, какъ **1** и **2** на *AB*.

Точки **5** и **6** пересѣченія реберъ пирамиды съ крышей *CDMN* опредѣлятся на вертикальной проекціи точками 5′ и 6′ пересѣченія проекцій *s*′5′ и *s*6′ съ проекціями *m′d′* и *n′d′* граней.

Точки пересѣченія остальныхъ реберъ пирамиды съ двускатными крышами расположатся симметрично съ точками **5** и **6**. Точку **9** пересѣченія разжелобка *MI* съ пирамидой можно опредѣлить. вращая линію *MI* и пирамиду вокругъ оси послѣдней до тѣхъ поръ, пока грань *LTS* пирамиды не станетъ ⊥ *V*. Тогда линія *MI* расположится параллельно *V*, и точка встрѣчи *MI* съ *LTS* будетъ 9′9. Поворачивая эту точку обратно, найдемъ ея положеніе 9, 9′. Остальныя точки, аналогичныя точкѣ **9**, расположатся симметрично съ ней относительно оси пирамиды на остальныхъ разжелобкахъ двускатныхъ крышъ.

Соединяя между собой полученныя точки, получимъ искомую линію сѣченія.

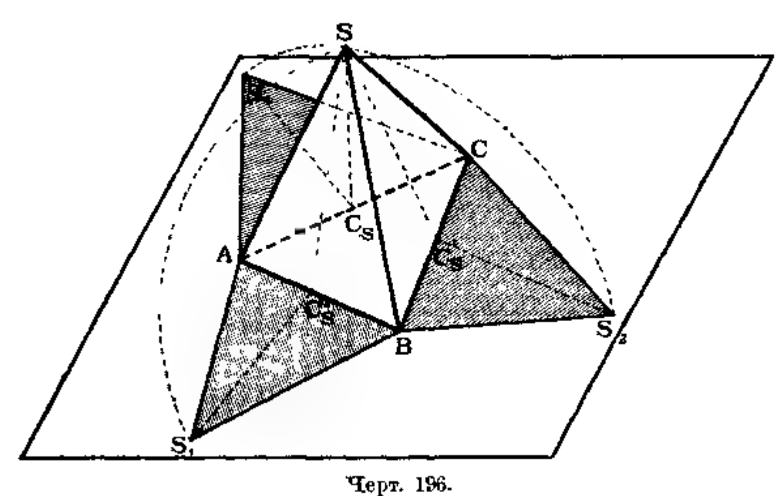
---

§ 13. Развертка поверхностей многогранниковъ.

При построеніи моделей различныхъ металлическихъ отливокъ, фасонныхъ камней, сложныхъ деревянныхъ сопряженій и т. п. часто бываетъ необходимо знать истинныя фигуры каждой грани модели, чтобы по этой фигурѣ построить шаблонъ грани.

Для опредѣленія истинныхъ фигуръ граней тѣла пользуются разверткой его поверхности.

Разверткой поверхности многогранника называется плоская фигура, полученная при совмѣщеніи граней тѣла съ плоскостью одной изъ нихъ



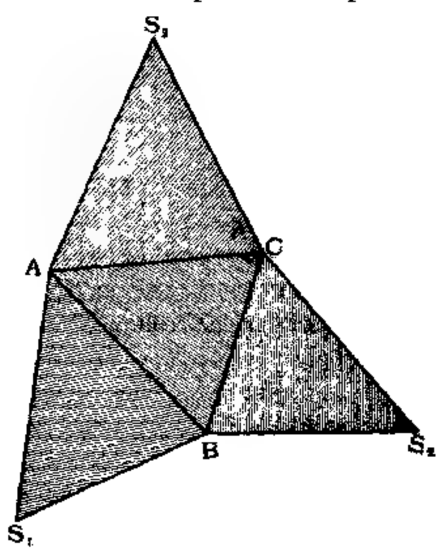
Черт. 196.

съ помощью послѣдовательнаго вращенія граней вокругъ разныхъ реберъ тѣла.

На черт. 196 изображена пирамида $SABC$. Разрѣжемъ поверхность ея по ребрамъ SA, SB и SC и совмѣстимъ ея боковыя грани съ плоскостью основанія ABC, вращая ихъ соотвѣтственно вокругъ реберъ AB, BC и AC.

Тогда точка S, принадлежащая всѣмъ тремъ боковымъ гранямъ, будетъ описывать дуги круговъ съ центрами въ точкахъ Cs, Cs' и Cs'' и упадетъ, при совмѣщеніи грани ABS, въ точку S_1, при совмѣщеніи грани BCS, въ точку S_2, и при совмѣщеніи грани ACS, въ точку S_3.

Полученная плоская фигура изображена отдѣльно на черт. 197 и называется разверткой поверхности пирамиды.



Черт. 197.

Вообще говоря, развертку поверхности любого многогранника можно построить, опредѣливъ истинныя величины всѣхъ его реберъ и діагона-

лей каждой его грани, которыя дѣлили бы эти грани на рядъ треугольниковъ. Тогда задача на построеніе развертки свелась бы къ задачѣ на опредѣленіе истинной длины отрѣзковъ прямыхъ линій и къ послѣдовательному построенію ряда треугольниковъ по тремъ извѣстнымъ сторонамъ ихъ.

Въ частности же при построеніи развертокъ и для опредѣленія истинной фигуры граней многогранника пользуются методами вращенія или перемѣны плоскостей проекціи.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ построенія развертокъ поверхности многогранниковъ.

Дана пирамида $SABC$ (черт. 198). Построить развертку ея поверхности.

Такъ какъ пирамида стоитъ на H, то основаніе ея на эту плоскость проектируется безъ искаженія.

Совмѣстимъ и остальныя грани пирамиды съ плоскостью H.

Начнемъ совмѣщеніе съ грани SAB.

Повернемъ ее вокругъ AB до совпаденія съ H. Тогда точка S опишетъ кругъ съ центромъ въ C_s. Радіусъ вращенія точки S, опредѣлится, какъ гипотенуза, изъ премоугольнаго треугольника $sC_s s_1'$, въ которомъ прямой уголъ при вершинѣ s, а катетъ $sS_1' = s_0 s'$. Совмѣщенное положеніе S_1 точки S получится въ точкѣ пересѣченія двухъ линій: $sc_s \perp ab$ и дуги круга, описаннаго изъ центра c_s радіусомъ $c_s S_1'$.

Фигура $S_1 ab$ будетъ разверткой грани SAB.

Для опредѣленія развертки грани SAC достаточно опредѣлить лишь длину ребра SC, такъ какъ длина ребра SA уже опредѣлена и равна длинѣ $S_1 a$.

Длину SC опредѣляемъ пользуясь теоремой 4-й (стр. 21), какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника $ss_2'c$ съ прямымъ угломъ при вершинѣ s и съ катетомъ $ss_2' = ss_1' = s_0 s'$.

Совмѣщенное положеніе S_2 точки S при вращеніи грани SAC опредѣлится какъ пересѣченіе двухъ дугъ круговъ: одного, описаннаго изъ точки c радіусомъ $s_2'c$, и другого, описаннаго изъ точки a радіусомъ $S_1 a$.

Ту же точку S_2 можно было бы опредѣлить, имѣя въ виду, что при совмѣщеніи SAC съ H, точка S будетъ двигаться въ плоскости, проходящей черезъ S и перпендикулярной къ AC.

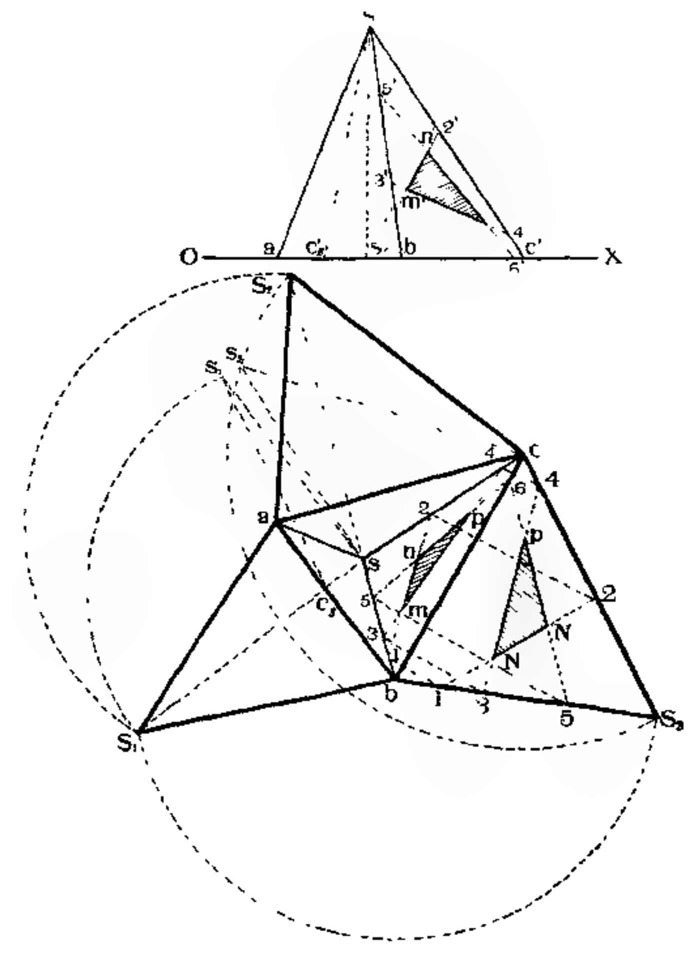
Поэтому точка S_2 опредѣляется также пересѣченіемъ перпендикуляра $S_2 s$ къ ac и дуги круга, описаннаго изъ a радіусомъ $S_1 a$.

Наконецъ, развертку грани SBC легко построить, имѣя уже опредѣленными три стороны ея $BC = bc$, $bS_3 = bS_1$ и $cS_3 = cS_2$.

Если на какой-нибудь грани пирамиды была бы начерчена фигура,

напримѣръ, MNP, и требовалось бы показать ту же фигуру на разверткѣ, то можно поступить слѣдующимъ образомъ.

Продолжимъ стороны фигуры MNP до пересѣченія съ ребрами SB, SC и BC въ точкахъ **1**, **2**, **3**, **4**, **5** и **6**. При совмѣщеніи SBC съ H, точки **1**, **2**, **3**, **4**, **5** будутъ двигаться по линіямъ, перпендикулярнымъ къ bc, и расположатся на соотвѣтственныхъ, совмѣщенныхъ съ H, ребрахъ пирамиды въ точкахъ **1**, **2**, **3**, **4** и **5**.

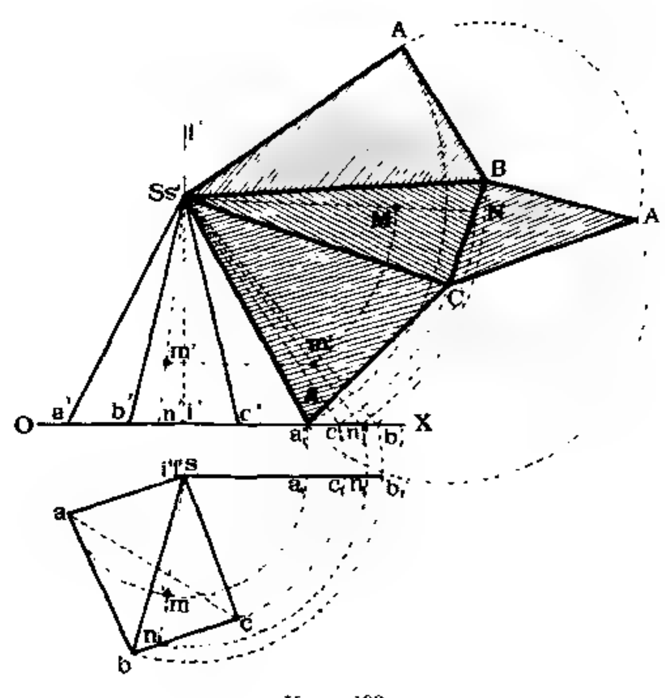


Черт. 198.

Соединяя эти послѣднія точки попарно линіями **12**, **34**, **56**. мы получимъ въ пересѣченіи этихъ линій точки M, N, P, опредѣляющія искомую фигуру MNP на разверткѣ грани SBC.

Разсмотримъ теперь другой способъ построенія развертки пирамиды $SABC$ (черт. 199), стоящей на H.

Опредѣлимъ истинныя длины реберъ SA, SB и SC пирамиды вращая ихъ вокругъ оси II, проходящей черезъ вершину S и перпендикулярной къ H, до положенія, параллельнаго V. Истинныя длины этихъ реберъ будутъ соотвѣтственно равны отрѣзкамъ $s'a_1'$, $s'b_1'$ и $s'c_1'$.



Черт. 199.

Зная эти длины и имѣя въ виду, что ребра AC, AB и BC проектируются на H безъ искаженія въ отрѣзки ac, ab и bc, строимъ на V развертку поверхности пирамиды, начиная ее со стороны SA, совпадающей съ $s'a_1'$.

Точки C, B, A развертки опредѣляются изъ условія, что:

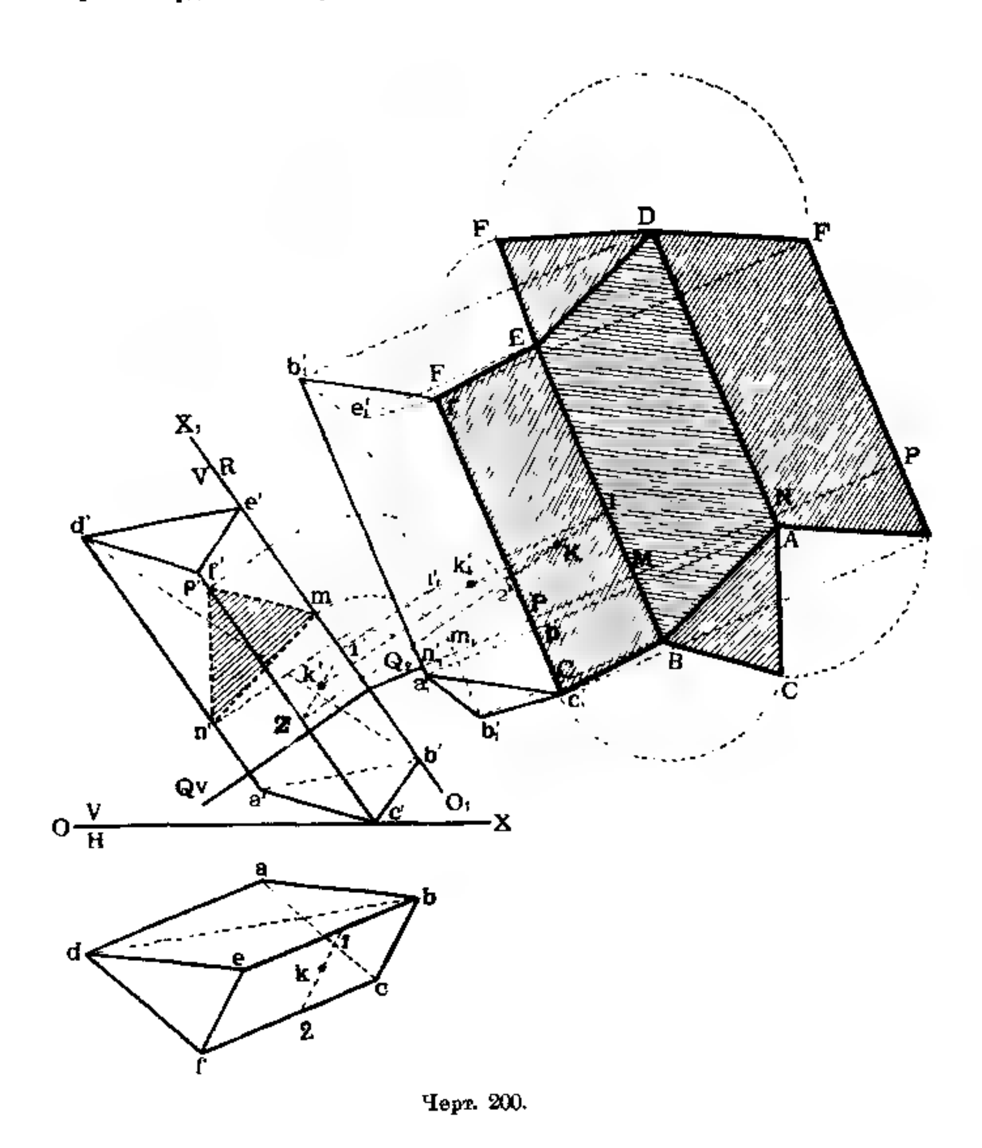
$$SA = s'a_1';\ SB = s'b_1';\ SC = s'c_1';\ AC = ac;\ BC = bc;\ AB = ab.$$

Если бы требовалось показать на разверткѣ, напримѣръ, грани SBC точку M, лежащую въ этой грани и заданную проекціями m' и m, то построить ее можно было бы слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ черезъ m', m линію $s'm'$, sm и находимъ точку n', n ея пересѣченія съ $b'c'$, bc. Вращаемъ линію $s'n'$, sn вокругъ оси II до положенія, параллельнаго V, и отмѣчаемъ на повернутомъ положеніи $s'n_1'$ этой

линіи точку m_1'. Далѣе, засѣкаемъ сторону BC дугою изъ центра s' радіуса $s'n_1'$ въ точкѣ N, и соединяемъ S съ N.

Засѣкаемъ линію SN дугою радіуса $s'm_1'$ изъ центра s' къ точкѣ M, которая и будетъ искомой.



Черт. 200.

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ развертки призмы $ABCDEF$ (чертежъ 200), заданной случайнымъ образомъ.

Для опредѣленія истинной величины ея длинныхъ реберъ мѣняемъ плоскости проекцій такъ, чтобы новая горизонтальная плоскость B была перпендикулярна къ V и паралльна этимъ ребрамъ, и переходимъ отъ

системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{R}$. Строимъ новую вертикальную проекцію $a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$ призмы на плоскости B.

Развертку призмы построимъ въ плоскости R и начнемъ съ ребра FC, которое проектируется на R безъ искаженія.

Примемъ FC совпадающимъ съ $f_1'c_1'$. При построеніи развертки замѣтимъ, что точки ея E, D, B и другія будутъ лежать на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ точекъ e_1', d_1', b_1' и т. д. къ линіи FC. Разстоянія же между ребрами FC, BE, DA и т. д. развертки должны равняться истиннымъ разстояніямъ между этими ребрами. Чтобы опредѣлить эти разстоянія построимъ сѣченіе призмы съ плоскостью, перпендикулярной къ ея ребрамъ, и найдемъ истинную фигуру—треугольникъ этого сѣченія. Стороны этого треугольника и будутъ равны разстояніямъ между ребрами призмы.

Итакъ, проводимъ въ системѣ $\frac{V}{R}$ плоскость Q, перпендикулярную къ ребрамъ призмы ($Qv \perp O_1X_1$ и $Q_r \perp FC$). Линія сѣченія Q съ призмой спроектируется на B въ прямую линію $n_1'm_1'p_1'$.

Совмѣщаемъ Q съ V, вращая Q вокругъ слѣда Qv и находимъ совмѣщенную, а слѣдовательно, и истинную фигуру $n'm'p'$ треугольника MNP.

Далѣе, откладываемъ вдоль линіи Q_r отъ точки P послѣдовательно отрѣзки $PM = p'm'$; $MN = m'n'$ и $NP = n'p'$.

Черезъ точки M, N и P проводимъ линіи параллеленыя FC до пересѣченія въ точкахъ A, B, C, D, E, F съ ранѣе упомянутыми перпендикулярами къ FC, проведенными изъ точекъ a_1', b_1', c_1', d_1', e_1', f_1'.

Соединяя между собой точки C, B, A, C и F, E, D, F, получимъ развертку боковой поверхности призмы. Зная же длины сторонъ FE, ED и DF, а также CB, BA и AC, нетрудно къ этой разверткѣ пристроить и треугольники ABC и DEF основаній призмы.

Для построенія на разверткѣ точки K, случайно заданной на грани $BCFE$, проводимъ въ системѣ $\frac{V}{H}$ черезъ эту точку какую-нибудь линію **12**.

Находимъ проекцію $1_1'2_1'$ этой линіи и проекцію k_1' точки на B. Изъ точки $1_1'$ опускаемъ перпендикуляръ на FC до пересѣченія съ EB и соединяемъ точки **1** и **2** ($2_1'$). Изъ k_1' опускаемъ перпендикуляръ на FC до пересѣченія съ **12** въ точкѣ K, которая и будетъ искомой.

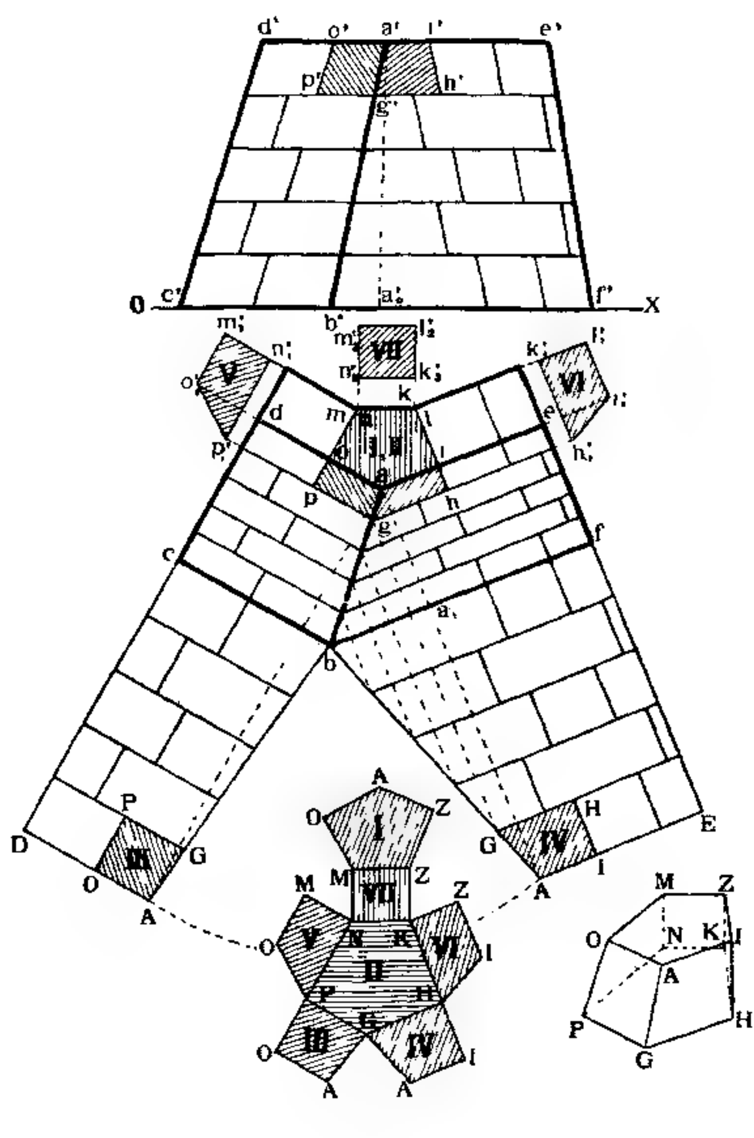
Задача № 20.

На черт. 201 изображена въ планѣ и фасадѣ часть каменной набережной, фасадъ которой $CDAEFB$ облицованъ штучными гранитными камнями. Опредѣлить истинные размѣры фасадныхъ граней этихъ камней [1]) и построить развертку поверхности верхняго углового камня, который на чертежѣ заштрихованъ.

[1]) При этомъ можно пренебречь толщиною швовъ.

Рѣшеніе.

Для опредѣленія истинныхъ размѣровъ фасадныхъ камней совмѣстимъ фасадныя грани набережной съ H, вращая одну вокругъ линіи BF, другую—вокругъ BC. Построенія аналогичны описаннымъ на стр. 87. Находимъ совмѣщенное положеніе



Черт. 201.

точки A правой фасадной грани. Соединяя A съ b и проводя $AE \parallel bf$, получаемъ совмѣщенное положеніе правой фасадной грани набережной. На ней уже нетрудно построить и изображенія отдѣльныхъ камней.

Подобнымъ же образомъ строимъ и совмѣщенное положеніе $bcDA$ лѣвой фасадной грани, имѣя при этомъ въ виду, что bA, равная длинѣ bA, только что опредѣлена.

Переходимъ теперь къ разверткѣ поверхности верхняго углового камня. Верхняя I и нижняя II грани его проектируются на H безъ искаженія въ пятиугольники $ailmo$ и $ghknp$. Фасадныя его грани III и IV получаются въ неискаженномъ видѣ на вышеупомянутыхъ развертках фасадныхъ граней набережной

Боковыя грани $PNMO$ и $HKLI$ опредѣляются при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій, проектированіемъ этихъ граней на плоскости имъ параллельныя Истинныя фигуры этихъ граней будутъ $p_1'n_1'm_1'o_1'$ и $h_1'k_1'l_1'i_1'$, причемъ высота этихъ фигуръ $m_1'n_1' = k_1'l_1'$ равна разности разстояній точекъ a' и g' отъ OX.

Истинная фигура задней грани $MNKL$ будетъ прямоугольникомъ $m_2'n_2'k_2'l_2'$, въ которомъ $n_2'k_2' = mk$, а $n_2'm_2' = n_1'm_1'$.

На чертежѣ 201 внизу всѣ отдѣльныя истинныя фигуры граней камня соединены въ одну общую развертку. Если такую развертку вырѣзать изъ бумаги, согнуть по ребрамъ и склеить, то получится модель камня, изображенная на чертежѣ 201 справа внизу.

---

§ 14. Построеніе многогранниковъ.

Построеніе многогранниковъ можетъ быть подчинено разнообразнымъ условіямъ, такъ что нельзя указать общихъ правилъ для рѣшенія этой задачи.

Въ каждомъ частномъ случаѣ въ зависимости отъ данныхъ величинъ можно построить проекціи многогранника, пользуясь въ большинствѣ случаевъ методами вращенія или перемѣны плоскостей проекцій.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Построить проекціи трегранной пирамиды $SABC$, стоящей на H основаніемъ ABC. Длины всѣхъ реберъ пирамиды даны (черт. 202).

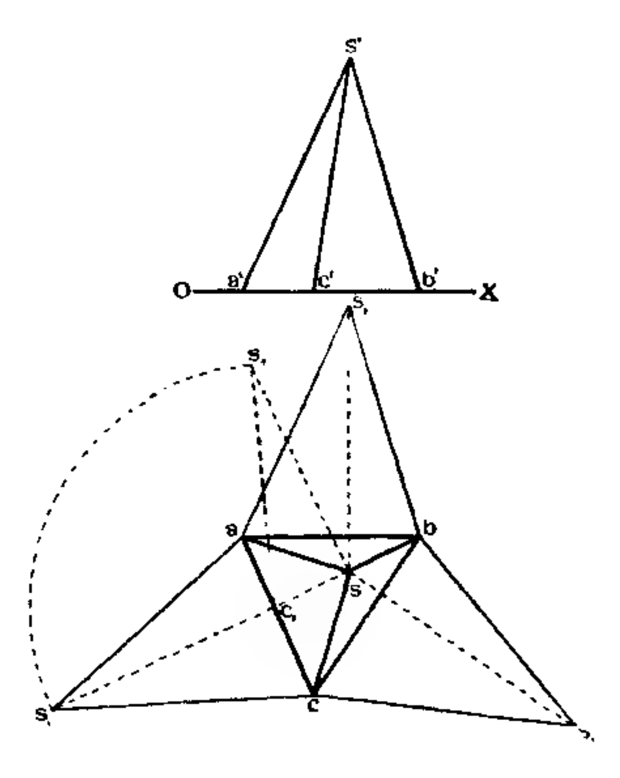
Для рѣшенія этой задачи строимъ на H. развертку граней пирамиды а затѣмъ поднимаемъ боковыя грани s_1ac, s_2ab и s_3bc въ пространство, вращая ихъ соотвѣтственно вокругъ реберъ ac, ab и bc. При вращеніи точекъ s_1 и s_2 онѣ будутъ двигаться по кругамъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ осямъ вращенія ac и ab. Горизонтальная проекція s вершины пирамиды опредѣлится, какъ точка пересѣченія линіи $s_1s \perp ac$ и $s_2s \perp ab$. Если построенія сдѣланы правильно, то линія s_3s будетъ перпендикулярна къ bc.

Для опредѣленія вертикальной проекціи s' вершины пирамиды совмѣщаемъ плоскость круга вращенія точки s_1 съ H, вращая ее вокругъ линіи s_1s.

Тогда вершина S расположится на линіи $s_4s \perp s_1s$ въ такой точкѣ s_4, которая должна отстоять отъ точки c, на разстояніи, равномъ радіусу вращенія точкѣ s_1, т. е. $s_1'c_1$. Отрѣзокъ s_4s и даетъ величину возвышенія вершины пирамиды надъ H. Зная его, нетрудно опредѣлить и точку s' и построить вертикальную проекцію пирамиды.

Построить проекціи правильнаго додекаэдра, стоящаго на плоскости *H*. по данной длинѣ реберъ его.

Ранѣе (черт. 136), нами были приведены проекціи общаго вида додекаэдра.

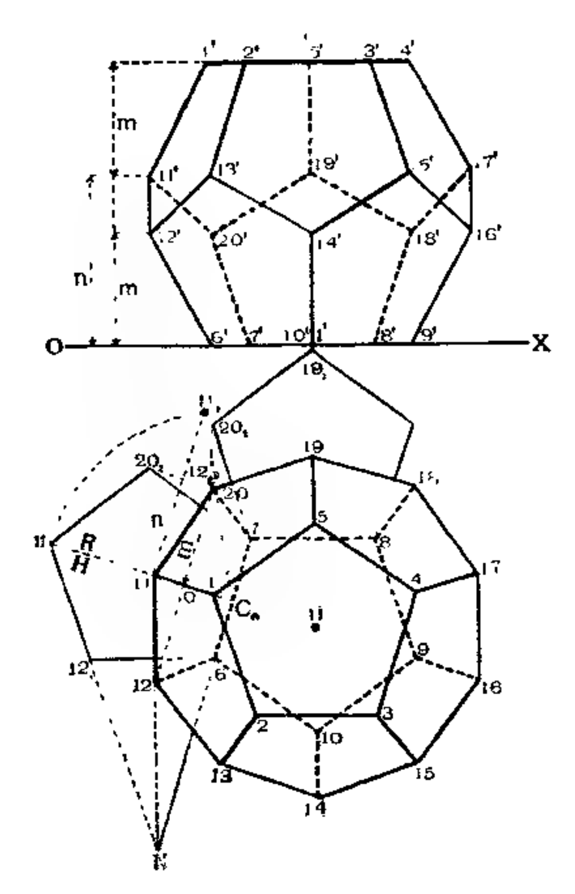


Черт. 202.

Для построенія его, строимъ (черт. 203) на *H* правильный пятиугольникъ 678910, служащій основаніемъ додекаэдра. Далѣе пристраиваемъ въ *H* къ сторонамъ 67 и 78 еще два пятиугольника, которые принимаемъ за совмѣщенные съ *H* положенія двухъ боковыхъ граней додекаэдра. Поднимаемъ теперь обѣ эти грани въ пространство, вращая ихъ соотвѣтственно вокругъ реберъ 67 и 78 до тѣхъ поръ, пока вершины 20_1 и 20_2 не совпадутъ въ точкѣ **20**, горизонтальная проекція которой 20 опредѣлится въ пересѣченіи линій $20_1 20 \perp 67$ и $20_2 20 \perp 78$. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ и точку 12.

Для опредѣленія горизонтальной проекція точки 11 продолжимъ линію $11_1 12_1$ до пересѣченія съ осью 67 въ точкѣ *N*. Эта линія послѣ поворота займетъ положеніе *N* **12** и горизонтальная проекція 11 точки **11** опредѣлится въ пересѣченіи линіи *N* **12** и $11_1\ C_{11} \perp 67$.

Возвышеніе точекъ **11** и **12** надъ H можно опредѣлять слѣдующимъ образомъ: перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{H}{R}$, причемъ R выберемъ перпендикулярной къ оси 67 въ точкѣ C_{11}.



Черт. 203.

Тогда проекція 11_2 точки **11** на R опредѣлится, какъ точка пересѣченія линіи $11_1 11_2 \perp$ къ $11_1 C_{11}$ и дуги круга описаннаго изъ центра C_{11} радіусомъ $11_1 C_{11}$.

Длина n отрѣзка $11_1 11_2$ и даетъ возвышеніе надъ H точки **11**. Возвышеніе точки **12** надъ H найдемъ, опуская отъ 12 перпендикуляръ на линію $11_1 C_{11}$ и замѣчая точки пересѣченія его съ осью $\frac{R}{H}$ и линіей $11_2 C_{11}$.

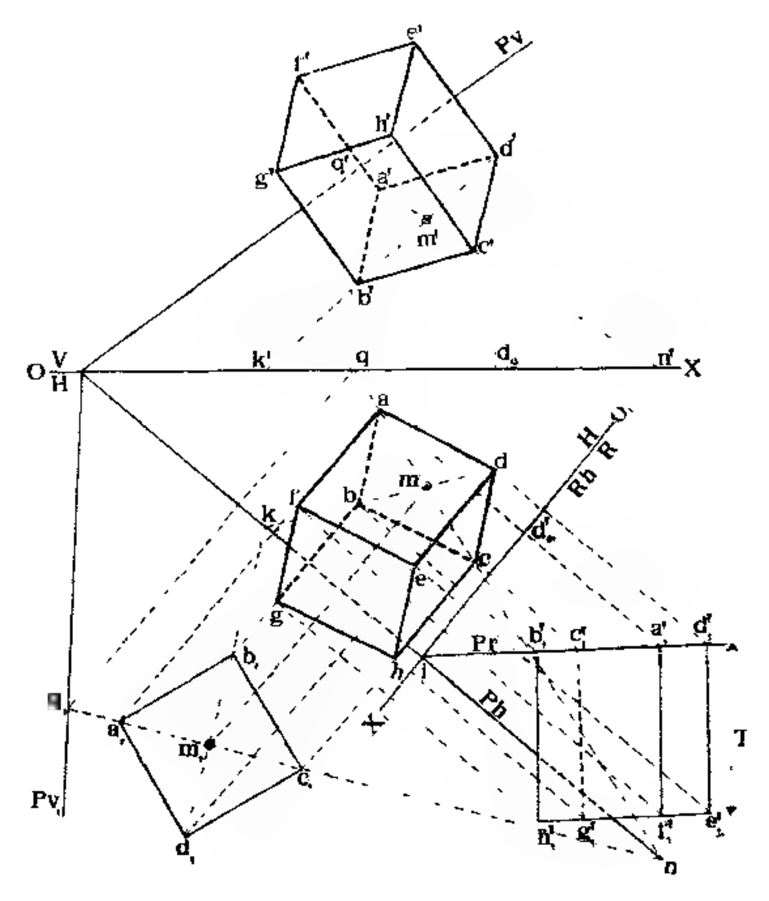
Длина m отрѣзка о 12_2 и даетъ возвышеніе точки 12 надъ H. Горизонтальная проекція верхняго основанія изображается правильнымъ

пятиугольникомъ 12345, повернутымъ вокругъ оси *JJ* додекаэдра относительно нижняго основанія на 180°.

Имѣя эти данныя, нетрудно построить вертикальныя и горизонтальныя проекціи всѣхъ вершинъ и реберъ додекаэдра.

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ построенія многогранника.

Дана плоскость *P* (черт. 204) и въ ней линія *NQ* съ точкой *M*.



Черт. 204.

Построить прямую призму, стоящую основаніемъ на *P*. Основаніемъ призмы долженъ быть квадратъ, лежащій въ *P*, при чемъ діагональ квадрата должна совпадать съ линіей *NQ*, центръ его долженъ быть въ точкѣ *M*. Длина стороны квадрата должна равняться данной длинѣ *S*, а высота призмы должна равняться данной длинѣ *T*.

Для рѣшенія задачи совмѣщаемъ съ H плоскость P вмѣстѣ съ линіей NQ и точкой M и строимъ въ совмѣщенномъ положеніи квадратъ $a_1b_1c_1d_1$ по данной его сторонѣ.

Возвращаемъ плоскость P въ прежнее положеніе и строимъ проекціи квадрата $a'b'c'd'$ и $abcd$. Такъ какъ призма должна быть прямая, т. е. ребра ея должны быть перпендикулярны къ основанію, то проекціи этихъ реберъ должны быть перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ слѣдамъ плоскости P. Для опредѣленія верхняго основанія призмы по условію, чтобы высота ея равнялась данной длинѣ T, перемѣнимъ плоскость проекцій V такъ, чтобы въ новой системѣ эта высота проектировалась безъ искаженія.

Выбираемъ новую плоскость проекцій $R \perp Ph$ и проектируемъ основаніе $ABCD$ призмы на R въ линію $a_1'b_1'c_1'd_1'$, совпадающую съ слѣдомъ въ Pr плоскости P. Ребра призмы спроектируются на R безъ искаженія въ видѣ линій перпендикулярныхъ къ Pr. Проводимъ проекцію $n_1'g_1'f_1'c_1'$ верхняго основанія призмы на R въ разстояніи T отъ Pr и находимъ горизонтальныя проекціи, а затѣмъ и вертикальныя на V точекъ верхняго основанія. Проекціи искомой призмы будутъ $abcdefgh$ и $a'b'c'd'e'f'g'h'$.

Задача № 21. Построить проекціи деревянной стропильной фермы, состоящей изъ двухъ ногъ и затяжки по слѣдующимъ даннымъ.

Тангенсъ угла наклона ногъ къ затяжкѣ, или, какъ говорятъ, уклонъ ногъ равенъ 0,8. Всѣ части стропилъ должны быть сдѣланы отъ брусьевъ квадратнаго сѣченія, длина стороны котораго дана (a). Ноги должны пересѣкать затяжку по внѣшнимъ линіямъ, отстоящимъ отъ концовъ затяжки на разстояніи (a). Полная длина затяжки дана (b).

Рѣшеніе Согласно вышеприведеннымъ даннымъ строимъ (черт. 205) сначала проекціи затяжки, затѣмъ начиная въ разстояніи (a) отъ концовъ затяжки, проводимъ линіи подъ даннымъ уклономъ (0,8) къ затяжкѣ.

Далѣе вычерчиваемъ проекціи обѣихъ ногъ даннаго поперечнаго сѣченія и проектируемъ сопряженія ногъ между собою и съ затяжкой.

На чертежѣ 205 показаны проекціи обѣихъ ногъ и затяжки отдѣльно, а также, для ясности, изображены детали врубокъ:

A — конецъ затяжки;

B — верхъ лѣвой ноги;

C — верхъ правой ноги;

D — низъ правой ноги (одинаковъ съ низомъ лѣвой ноги).

Задача № 22. На чертежѣ 206 изображена насыпь желѣзнодорожнаго полотна съ верхней горизонтальной площадкой. Ось полотна $S'S'$. Требуется спроектировать насыпь шоссе для переѣзда черезъ желѣзную дорогу по слѣдующимъ даннымъ:

Уголъ наклона въѣздовъ оси шоссе къ горизонту долженъ быть равенъ α.

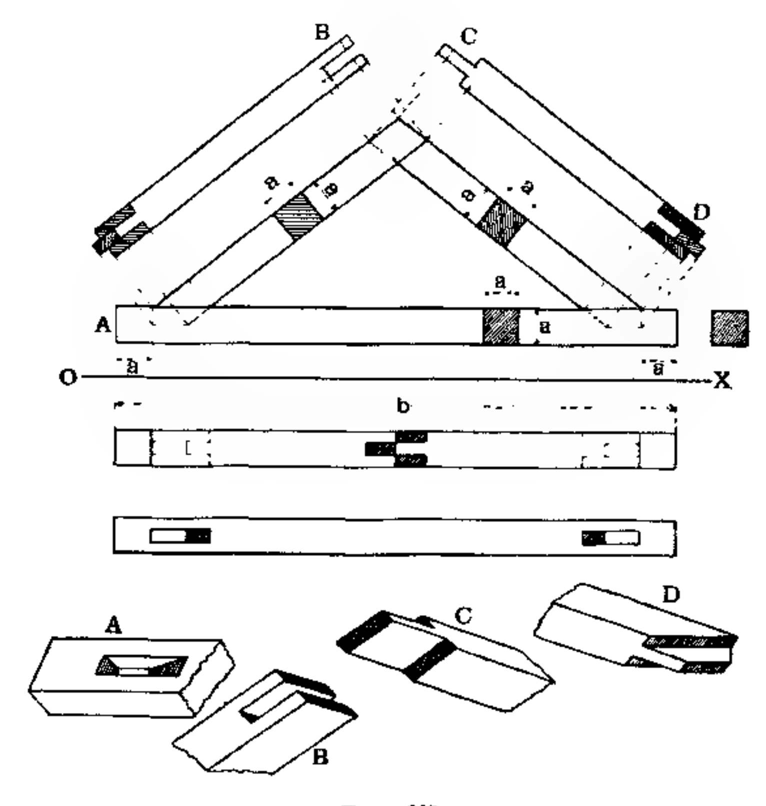
Ось шоссе должна въ планѣ составлять съ осью желѣзной дороги уголъ β и пересѣкать ее въ точкѣ D.

Тангенсъ угла наклона откосовъ шоссе равенъ 1.

Ширина шоссе по верху t. Поверхность земли принимается горизонтальной.

Рѣшеніе. Проводимъ черезъ d ось cc_1 шоссе подъ угломъ β къ оси ss_1 желѣзной дороги. Далѣе, проводимъ въ планѣ двѣ линіи hq и in, параллельныя cc_1, на разстояніи отъ нея $\frac{t}{2}$. Эти линіи изобразятъ въ планѣ бровки шоссе.

Замѣчаемъ точку q пересѣченія бровки hq съ бровкой ga желѣзнодорожнаго полотна и проводимъ $qn \perp cc_1$ до пересѣченія съ другой бровкой шоссе въ точкѣ n. Предполагаемъ, что часть qno является горизонтальной проекціей уширенія горизонтальнаго полотна желѣзной дороги.



Черт. 205.

Такимъ образомъ мы считаемъ, что линіи QN и NO въ пространствѣ горизонтальны.

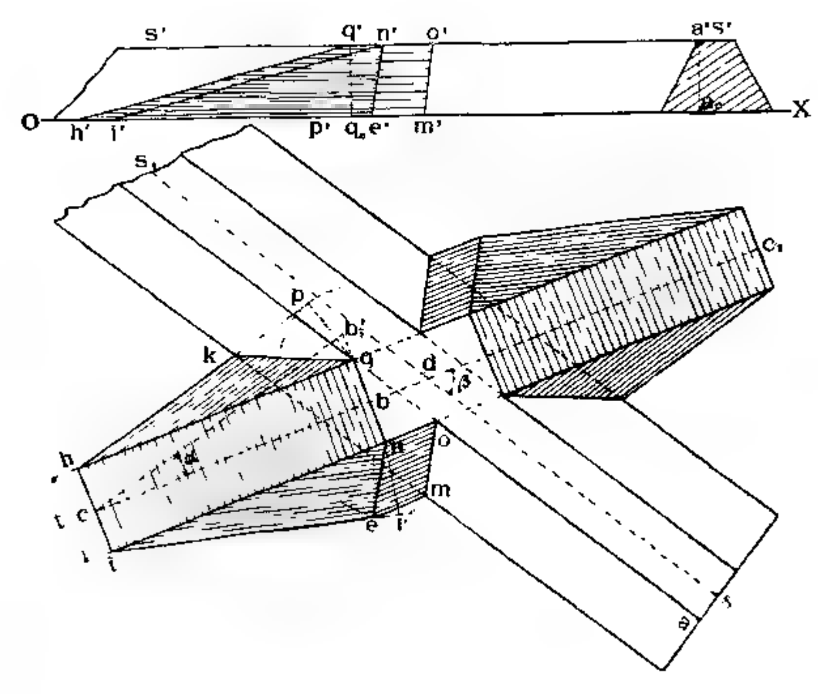
Найдемъ теперь линію сѣченія полотна шоссе съ поверхностью земли. Совмѣщаемъ съ H вертикальную плоскость, проектирующую ось шоссе на H, вращая ее вокругъ линіи cb.

Тогда точка B пересѣченія оси шоссе съ линіей QN спроектируется въ точку b_1', причемъ $bb_1' \perp cb$ и $bb_1' = a'a_0$ — высотѣ желѣзнодорожной насыпи. Проведя изъ b_1' линію подъ угломъ α къ cb, получимъ точку c, въ которой ось шоссе пересѣкаетъ поверхность земли. Проводимъ $chi \perp cb$ до пересѣченія съ проекціями hq и in бровокъ шоссе. Линія hi и будетъ служить пересѣченіемъ полотна шоссе съ землею. Найдемъ теперь линіи сѣченія откосовъ шоссе съ землею. Такъ какъ тангенсъ угла наклона откосовъ шоссе равенъ единицѣ, то описываемъ изъ точекъ q

и n дуги круговъ радіусами

$$qp = nr = a'a_0$$

и проводимъ изъ точекъ h и i линіи касательныя къ соотвѣтственнымъ дугамъ въ точкахъ p и r.



Черт 206.

Линіи hp и ir будутъ служить слѣдами откосовъ шоссе на землѣ. Дѣйствительно, уголъ между каждымъ откосомъ, напримѣръ, hpq и землей измѣряется въ плоскости перпендикулярной къ ребру hp въ какой-нибудь точкѣ p. Эта плоскость пересѣчетъ землю и откосъ по линіямъ pq и pQ. Точки Q, q и p образуютъ въ пространствѣ прямоугольный треугольникъ Qqp, у котораго катеты равны другъ другу, т. е.

$$qp = qQ = q_1q'.$$

Тангенсъ же угла при вершинѣ p въ такомъ треугольникѣ равенъ единицѣ, что и требовалось показать. Точка K пересѣченія слѣдовъ откосовъ шоссе и желѣзной дороги и точка Q опредѣляютъ линію сѣченія самихъ откосовъ шоссе и желѣзной дороги.

Предположимъ теперь, что откосъ проходящій черезъ бровку NO площадки имѣетъ тотъ же уклонъ, какъ и откосы желѣзнодорожной насыпи. Тогда горизонтальная проекція линіи сѣченія откосовъ площадки и желѣзнодорожной насыпи пойдетъ по биссектрисѣ угла noa, и точка $M(m)$ будетъ служить точкой пересѣченія слѣдовъ этихъ откосовъ. Слѣдъ me откоса площадки пойдетъ по линіи параллельной no. Замѣчаемъ точку e пересѣченія слѣдовъ ir и me.

Линія $NE(ne)$ будетъ служить пересѣченіемъ откосовъ площадки и шоссе. Построивъ такимъ образомъ линіи сѣченія въѣзда на желѣзную дорогу съ послѣдней, строимъ таковыя же линіи для съѣзда которыя располагаются симметрично съ ранѣе построенными.

§ 15. Тѣни многогранниковъ.

а *Общія понятія.*

Построеніе тѣней имѣетъ значеніе главнымъ образомъ для приданія чертежу наглядности изображенія.

Извѣстно, что сила освѣщенія какой-нибудь поверхности зависитъ отъ угла наклона свѣтовыхъ лучей къ освѣщаемой поверхности. Кромѣ того, она зависитъ еще отъ свойства окружающей атмосферы. Чѣмъ дальше источникъ свѣта отъ освѣщаемой поверхности, тѣмъ слабѣе послѣдняя освѣщается, и эта зависимость между силой свѣта и разстояніемъ источника свѣта отъ освѣщаемой точки выражается такимъ закономъ: сила свѣта у какой-нибудь точки обратно пропорціональна квадратамъ разстояній источника свѣта отъ этой освѣщаемой точки.

Мы будемъ пока разсматривать вопросъ исключительно съ геометрической точки зрѣнія, независимо отъ угла наклона лучей свѣта къ освѣщаемой поверхности, предполагая вообще, что на какую бы грань предмета свѣтъ ни падалъ, онъ освѣщаетъ ее равномѣрно, иными словами, мы будемъ разсматривать построеніе тѣней, не касаясь физической стороны явленія.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ различать *тѣни собственныя* и *тѣни падающія. Собственной тѣнью* называется такая, которая получается на неосвѣщенной части поверхности предмета. *Падающей тѣнью* называется та, которая падаетъ отъ предмета на какую-нибудь поверхность.

При построеніи тѣней мы будемъ предполагать, что лучи свѣта параллельны другъ другу.

Направленіе лучей свѣта въ техническихъ чертежахъ, составленныхъ въ ортогональныхъ проекціяхъ, обыкновенно принимается параллельнымъ діагонали куба PP_1, прислоненнаго двумя гранями къ плоскостямъ проекцій (черт. 207), и лучи идутъ слѣва, сверху, сзади — вправо, внизъ, впередъ.

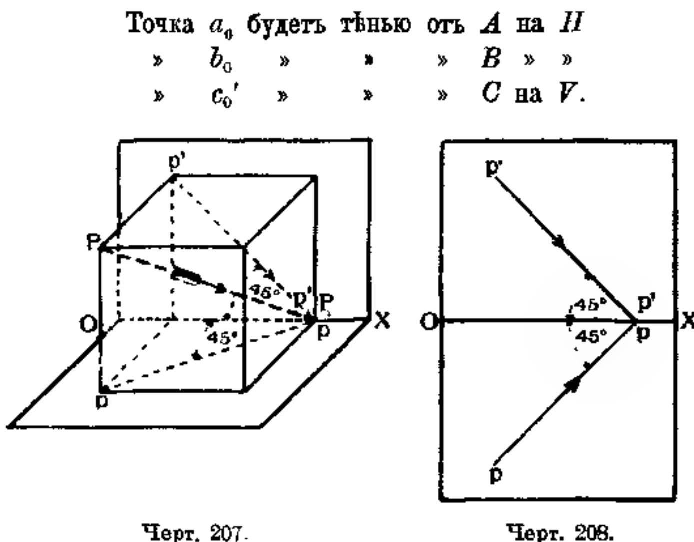
При такихъ условіяхъ направленіе лучей изобразится въ проекціяхъ согласно чертежу 208, при чемъ эти проекціи луча будутъ составлять съ осью OX углы въ 45°.

Пусть дано въ пространствѣ какое-нибудь тѣло $SABCT$ (черт. 209) и направленіе лучей свѣта PP'. Проведемъ черезъ вершины тѣла лучи, параллельные PP_1 и построимъ точки пересѣченія ихъ съ плоскостями проекцій.

Нѣкоторые изъ этихъ лучей могутъ пересѣчь сначала переднюю полу V, а потомъ нижнюю полу V другіе же наоборотъ, могутъ пересѣчь сначала верхнюю полу V, а потомъ заднюю полу H.

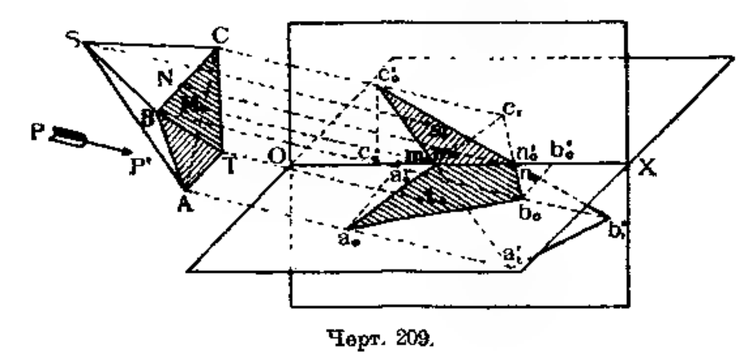
Мы считаемъ видимыми лишь тѣ точки, которыя лежатъ въ предѣлахъ 1-го угла пространства и на верхней полѣ V и на передней H. Точки пересѣченія лучей съ этими полами V и H будутъ служить тѣнями отъ соотвѣтственныхъ вершинъ даннаго тѣла.

Точка a_0 будетъ тѣнью отъ A на H
» b_0 » » » B » »
» c_0' » » » C на V.



Черт. 207. Черт. 208.

Совокупность лучей, проходящихъ черезъ ребро AB тѣла образуетъ плоскость, параллельную PP_1. Эта плоскость пересѣчетъ H по линіи a_0b_0, которая будетъ служить тѣнью ребра AB.



Черт. 209.

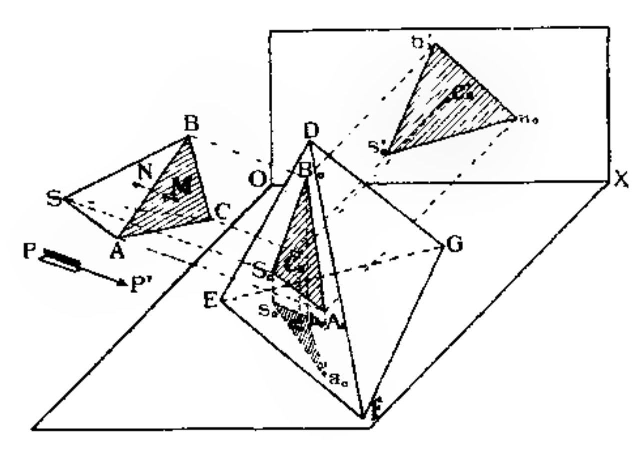
Подобнаго же родв плоскости образуютъ лучи, проходящіе черезъ ребра AC и BC. Линіи сѣченія этихъ плоскостей съ плоскостями проекцій будутъ являться тѣлями отъ реберъ AC и BC. Въ данномъ случаѣ тѣни отъ прямыхъ линій AC и BC получились ломаными $a_0m_0c_0'$ и $b_0n_0c_0'$, такъ какъ часть тѣни отъ каждаго изъ этихъ реберъ падаетъ на H и часть на V.

Линія $a_0b_0n_0m_0a_0$ называется *контуромъ тѣни, падающей отъ тѣла* на H, а линія $n_0c_0'm_0n_0$—*контуромъ тѣни, падающей отъ тѣла на* V.

Каждый изъ этихъ контуровъ, являясь фигурой, лежащей на одной изъ плоскостей проекцій, будетъ имѣть вторую проекцію совпадающую съ осью.

Такъ, проекціи тѣни, падающей на H, будутъ $a_0m_0n_0b_0$ и $a_0'm_0'n_0'b_0'$, а падающей на V—$m_0'c_0'n_0'$ и $m_0c_0n_0$.

Совокупность лучей проведенныхъ черезъ точки тѣла $SABCT$ образуютъ нѣкоторую призму, поверхность которой, пересѣкаясь съ плоскостями проекцій, и даетъ контуръ падающей тѣни. Поверхность этой же призмы какъ бы обертываетъ тѣло $SABCT$ по линіи ABC, которая



Черт. 210.

является границей освѣщенной части $SABC$ поверхности тѣла отъ неосвѣщенной $TABC$.

Линія ABC соприкасанія обертывающей лучевой призмы съ даннымъ тѣломъ называется *контуромъ собственной тѣни* тѣла. Очевидно, контуръ падающей тѣни отъ тѣла является тѣнью отъ контура собственной его тѣни.

Разсматривая линіи $a_0c_1b_0$ и $a_1'c_0'b_1'$ сѣченія поверхности лучевой призмы съ V и H, нетрудно замѣтить, что обѣ эти фигуры пересѣкаются въ точкахъ m_0m_0' и n_0n', служащими точками перелома на оси OX видимыхъ частей тѣлей. Это свойство помогаетъ иногда рѣшенію задачи на построеніе тѣней отъ тѣла, падающихъ на V в H.

Если тѣнь отъ одного тѣла, напримѣръ $SABC$ (черт. 210) падаетъ на другое $DEFG$, то контуръ падающей тѣни получится, какъ линія пересѣченія лучевой призмы, обертывающей тѣло $SABC$, съ пирамидой $DEFG$. Контуръ $A_0B_0S_0$ этой тѣни, какъ фигура, лежащая нъ про-

странствѣ, должна имѣть двѣ проекціи, горизонтальную $a_0b_0s_0$ и вертикальную $a_0'b_0's_0'$.

Замѣтимъ, что эти двѣ фигуры являются не двумя тѣнями отъ тѣла $SABC$, а лишь двумя проекціями одной и той же тѣни $A_0B_0S_0$.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что задача на построеніе тѣней падающихъ отъ даннаго тѣла на V, H или на какую-нибудь другую плоскость или на другое тѣло сводится къ задачѣ на пересѣченіе призмы, обертывающей данное тѣло, съ той поверхностью, на которой желаютъ опредѣлить падающую тѣнь, т. е. въ общемъ случаѣ построеніе падающихъ тѣней сводится къ задачѣ на пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ, каковая задача была нами уже разсмотрѣна.

Для построенія лучевой призмы, обертывающей данное тѣло, слѣдуетъ сначала опредѣлить контуръ его собственной тѣни. Для этого сначала опредѣляютъ, какія его грани освѣщены, и какія неосвѣщены.

Чтобы узнать, будетъ ли какая-нибудь грань ADC даннаго тѣла освѣщена или нѣтъ, слѣдуетъ взять на этой грани случайную точку M и провести черезъ нее лучъ MN навстрѣчу къ источнику свѣта. Если этотъ лучъ на своемъ пути пересѣчетъ какую-нибудь грань тѣла въ точкѣ N, то послѣдняя заградитъ доступъ свѣта къ точкѣ M, и точка M, а слѣдовательно, и вся грань ABC будетъ въ собственной тѣни.

Если же лучъ, проведенный изъ точки M по направленію къ источнику свѣта, не пересѣчетъ ни одной грани тѣла, то точка M, а слѣдовательно, и грань ABC, были бы освѣщенными.

Можно было бы подобный же лучъ провести и черезъ вершину C тѣла. Въ нашемъ случаѣ этотъ лучъ пересѣкъ бы одну изъ граней тѣла $SABC$, что указало бы, что точка C, а, слѣдовательно, и грани SAC, SBC и ABC тѣла, сходящіяся въ этой точкѣ, неосвѣщены.

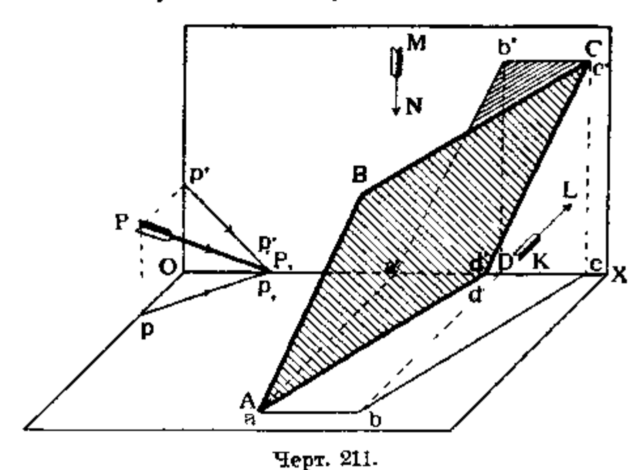
Разсмотримъ теперь, какъ узнать, какая изъ сторонъ плоской фигуры, находящейся въ пространствѣ, будетъ проектироваться на плоскости проекцій освѣщенной, и какая—неосвѣщенной, и условимся въ дальнѣйшемъ изображать проекціи видимыхъ неосвѣщенныхъ сторонъ плоскости заштрихованными.

На чертежѣ 211 изображена въ пространствѣ плоская фигура $ADCD$ и показаны ея проекціи $abcd$ и $a'b'c'd'$.

При направленіи лучей свѣта PP, будетъ освѣщена вѣвая сторона плоскости $ADCD$, правая же будетъ въ собственной тѣни.

При проектированіи $ABCD$ на H, и при направленіи лучей зрѣнія по MN зритель будетъ видѣть освѣщенную сторону $ABCD$, и потому проекція $abcd$ этой стороны на H не будетъ заштрихована. При проектированіи же фигуры $ABCD$ на V и при направленіи лучей зрѣнія KL зритель будетъ видѣть тѣневую сторону фигуры $ADCD$, и потому проекція $a'b'c'd'$ этой стороны на V должна быть заштрихована.

На черт. 212 показаны различные случаи расположенія плоскихъ фигуръ относительно луча свѣта PP_1 и плоскостей проекцій.



Черт. 211.

Плоскость Q имѣетъ верхнюю сторону освѣщенной и въ проекціяхъ

Черт. 212.

на H и V будетъ казаться освѣщенной, почему обѣ проекціи ея не будутъ заштрихованы.

Плоскость R совпадаетъ съ лучемъ PP_1, иными словами лучъ свѣта скользитъ вдоль плоскости R. Условимся считать обѣ стороны такой плоскости неосвѣщенными. При такихъ условіяхъ обѣ проекціи этой плоскости должны быть заштрихованы.

Плоскость S расположена выше луча PP_1. Лѣвая нижняя сторона ея будетъ освѣщена, правая же верхняя — въ тѣни. При направленіи лучей зрѣнія перпендикулярно къ H или къ V зритель увидитъ лишь неосвѣщенную сторону плоскости S и потому обѣ проекціи ея должны быть заштрихованы.

Плоскость T верхней своей стороной обращена къ свѣту. При направленіи лучей зрѣнія перпендикулярно къ H, зритель увидитъ освѣщенную сторону T и потому проекція T на H не будетъ заштрихована. При направленіи же лучей зрѣнія перпендикулярно къ V зритель увидитъ тѣневую сторону T, и потому проекція T на V должна быть заштрихована.

Плоскость U расположена лѣвой нижней стороной къ свѣту, поэтому ея лѣвая нижняя сторона будетъ освѣщена, а правая верхняя—въ тѣни. При направленіи лучей зрѣнія $\perp H$, зритель увидитъ неосвѣщенную сторону U, поэтому проекція U на H должна быть заштрихована. При направленіи же лучей зрѣнія $\perp V$, зритель увидитъ освѣщенную сторону U, и потому проекція U на V не будетъ заштрихована.

Для того, чтобы умѣть опредѣлять геометрически, какая сторона какой плоскости будетъ казаться освѣщенной или въ тѣни, если смотрѣть на H или на V, примѣнимъ слѣдующій пріемъ.

Замѣтимъ точку пересѣченія P_1 луча съ разсматриваемой плоскостью. Затѣмъ выберемъ на этомъ лучѣ точку P *влѣво* отъ точки P_1, т. е. въ направленіи къ источнику свѣта.

Опустимъ изъ точки P перпендикуляры на H и на V и найдемъ ихъ точки пересѣченія съ разсматриваемой плоскостью.

Если точка пересѣченія данной плоскости съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ P на H, будетъ ниже P, то на H будетъ проектироваться видимая освѣщенная сторона плоскости.

Если же эта точка пересѣченія будетъ выше P, то на H будетъ проектироваться видимая неосвѣщенная сторона плоскости.

Если точка пересѣченія перпендикуляра, опущеннаго изъ P на V, съ данной плоскостью будетъ ближе къ V нежели P, то на V будетъ проектироваться видимая освѣщенная сторона плоскости.

Если же эта точка пересѣченія будетъ дальше отстоять отъ V, нежели P, то на V будетъ проектироваться видимая неосвѣщенная сторона плоскости.

Обращаясь къ чертежу 212, получаемъ, согласно вышеприведенному правилу слѣдующее:

Перпендикуляръ, опущенный изъ P на H встрѣчаетъ плоскость Q въ точкѣ A, причемъ $AY < PY$. Поэтому Q будетъ казаться освѣщенной, если смотрѣть на H. Опустимъ теперь перпендикуляръ изъ P на V и найдемъ точку B его пересѣченія съ Q. Такъ какъ $BZ < PZ$, то Q будетъ казаться освѣщенной, если смотрѣть на V[1]).

Подобнымъ же образомъ опущены изъ P перпендикуляры на H и V и найдены точки E, C, G, D ихъ пересѣченія съ плоскостями S, T и U. Такъ какъ точка пересѣченія перпендикуляра изъ P на H съ плоскостью U и точка пересѣченія перпендикуляра изъ P на V съ плоскостью T въ нашемъ случаѣ располагается внѣ предѣловъ чертежа, то вмѣсто P выбираемъ на лучѣ PP_1 точку P_2 *влѣво* отъ P_1 и проводимъ изъ P_2 эти перпендикуляры до пересѣченія съ T въ точкѣ E и съ U въ точкѣ I.

Далѣе, легко составить слѣдующую табличку, обозначая стороны плоскостей, которыя кажутся освѣщенными на H или V знакомъ +, неосвѣщенными знакомъ —, и по которымъ лучъ скользитъ, знакомъ 0.

Плоскости.	Результаты построеній.	Видимость на H.	Видимость на V.
Q	$AY < PY$; $BZ < PZ$	+	+
R	$PY = PY$; $PZ = PZ$	0	0
S	$CY > PY$; $DZ > PZ$		—
T	$EY < PY$; $Fp_2' > P_2p_1'$	+	—
U	$Ip_2 > P_2p_2$; $GZ < PZ$	—	+

Примѣчаніе. Можно было бы точку P или P_2 на лучѣ брать и справа отъ точки P_1 пересѣченія луча съ разсматриваемой плоскостью, но тогда разстоянія до H или V точекъ пересѣченія перпендикуляровъ изъ P или P_2 съ разсматриваемой плоскостью соотвѣтственно должны были бы быть не меньше, а больше разстояній P или P_2 до V и H, для того, чтобы имѣли мѣсто вышеупомянутыя условія видимости сторонъ плоскостей.

---

b) Тѣни отъ точекъ, линій и плоскихъ фигуръ.

На черт. 213 показаны построеніе тѣней на плоскостяхъ проекцій отъ точки A, отъ прямой $CB \perp H$ и отъ случайной прямой DE.

---

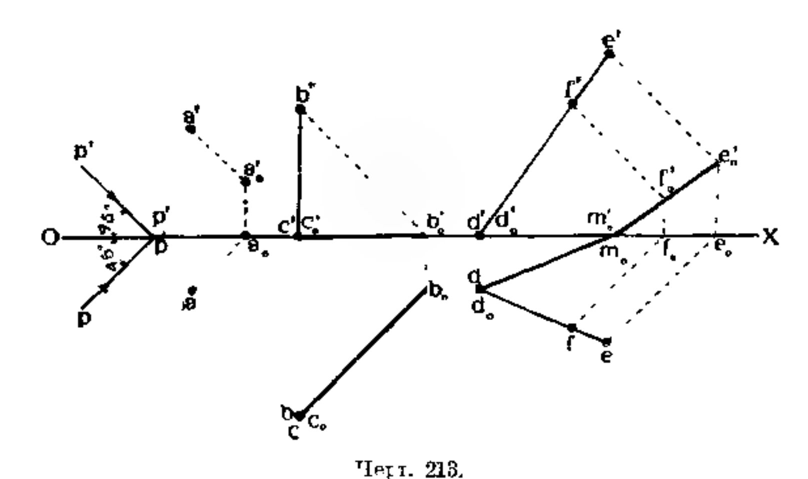
[1]) Разстояніе точекъ сзади V или ниже H считаемъ отрицательными и всегда меньшими положительныхъ разстояній точки P до V или до H.

Для построенія тѣни отъ точки A при данномъ направленіи лучей свѣта PP_1 проводимъ черезъ A лучъ, параллельный PP_1, и находимъ ближайшую къ A точку A_0 пересѣченія его съ плоскостью проекцій. Въ данномъ случаѣ лучъ сначала встрѣчаетъ плоскость V, а потомъ уже H. Поэтому слѣдъ A_0 луча на V и будетъ служить тѣнью отъ A на V.

Для построенія тѣни отъ прямой $BC \perp H$, находимъ точку B_0, тѣнь отъ B на H, и соединяемъ B_0 съ C_0, которая, являясь тѣнью отъ C, совпадаетъ съ C. Линія C_0B_0 и будетъ тѣнью отъ BC на H.

Строимъ тѣнь отъ линіи BE на V и H.

Тѣнью будетъ служить линіи сѣченія V и H съ плоскостью, проходящей черезъ DE и параллельной лучу свѣта. Находимъ точку E_0, тѣнь отъ E на V.



Черт. 213.

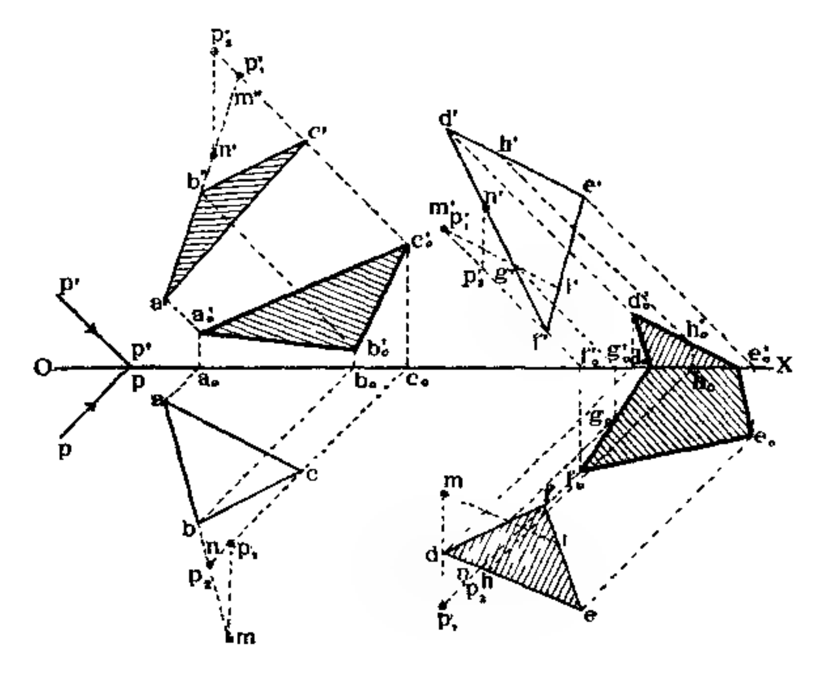
Тѣнь D_0 отъ точки D, лежащей на H, совпадаетъ съ самой точкою D.

Такъ какъ часть тѣни падаетъ на V, а часть на H, т. е. тѣнь получается ломаной, то для опредѣленія ея построимъ тѣнь E_0 отъ какой нибудь точки F прямой. Соединяемъ e_0' съ f_0' и продолжаемъ линію $e_0'f_0'$ до пересѣченія съ OX въ точкѣ m_0m_0'. Точка M_0 будетъ точкой перелома тѣни. Окончательно тѣнью DE будетъ линія $B_0M_0E_0$.

На черт. 214 показано построеніе тѣней отъ двухъ треугольниковъ ABC, отъ котораго тѣнь падаетъ лишь на V, и DEF, отъ котораго тѣнь падаетъ на V и H. Для построенія тѣней отъ треугольниковъ строимъ послѣдовательно тѣни отъ сторонъ ихъ такъ, какъ показано было на чертежѣ 213. На черт. 214 проекціи падающихъ тѣней заштрихованы.

Опредѣлимъ теперь собственныя тѣни данныхъ плоскихъ фигуръ сначала ABC, а потомъ DEF.

Проводимъ черезъ точку C фигуры ABC лучъ и беремъ на немъ слѣва отъ C точку P_1. Опускаемъ изъ P_1 перпендикуляръ къ V и находимъ точку M пересѣченія его съ ABC. Такъ какъ M лежитъ дальше отъ V нежели P_1, то, если смотрѣть на V, будетъ видна неосвѣщенная сторона фигуры ABC. Поэтому $a'b'c'$ заштриховано.



Черт. 214.

Беремъ теперь еще точку P_2 на лучѣ слѣва отъ C, проводимъ черезъ P_2 перпендикуляръ къ H и находимъ точку N пересѣченія его съ ABC. Такъ какъ P_2 лежитъ выше H_1, нежели N, то зрителю, смотрящему на H, будетъ видна освѣщенная сторона фигуры ABC. Поэтому abc не заштрихована.

Подобнымъ же образомъ проводимъ перпендикуляры къ V и къ H черезъ точки P_1 и P_2 на лучѣ P_1P_2F, проходящемъ черезъ точку F фигуры DEF (черт. 214), и находимъ точки M и N пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ плоскостью DEF. Такъ какъ точка N выше P_2, то def должно быть заштриховано. Вертикальная же проекція $d'e'f'$ не штрихуется, такъ какъ M ближе къ V, нежели P_1.

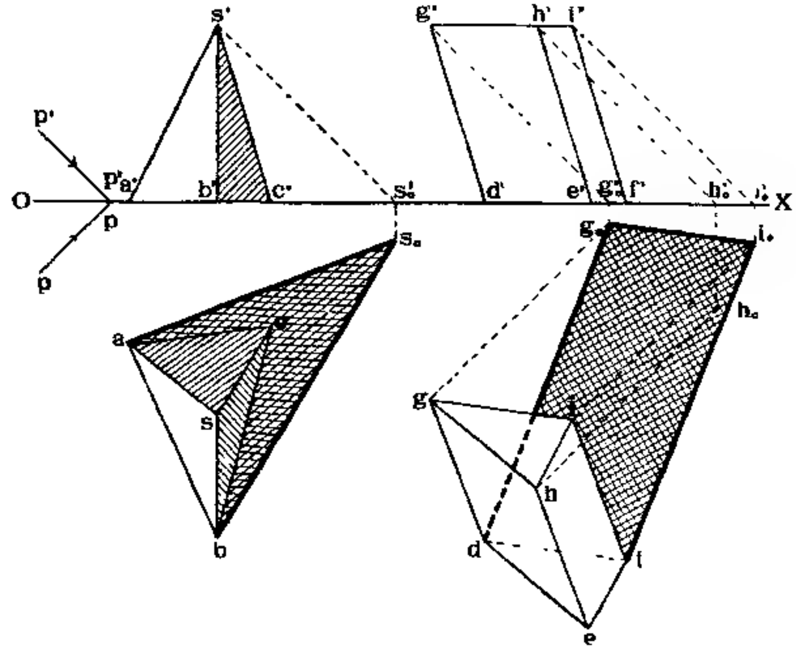
c) *Тѣни многогранниковъ.*

На черт. 215 показано построеніе тѣней отъ пирамиды $SABC$ и призмы $DEFGHI$, стоящихъ на H.

Тѣнь отъ пирамиды получаемъ слѣдующимъ образомъ:

Строимъ тѣнь S_0 отъ вершины S и соединяемъ S_0 съ a и b. Линія as_0b и будетъ контуромъ тѣни, падающей отъ пирамиды на H. Грани пирамиды ASC и BSC будутъ въ собственной тѣни.

Для построенія тѣни отъ призмы, проводимъ черезъ вершины ея G и I лучи и находимъ точки G_0 и I_0 пересѣченія ихъ съ H. Фигура dg_0i_0f и будетъ тѣнью, падающей отъ призмы на H.



Черт. 215.

Рѣшимъ въ качествѣ примѣра еще такую задачу. Дана пирамида $SABC$ и плоскость P (черт. 216). Построить собственныя и падающія тѣни.

Находимъ сначала точку **3** пересѣченія ребра SC пирамиды съ P, для чего служитъ вспомогательная линія **12** сѣченія P съ плоскостью, проектирующей SC на H.

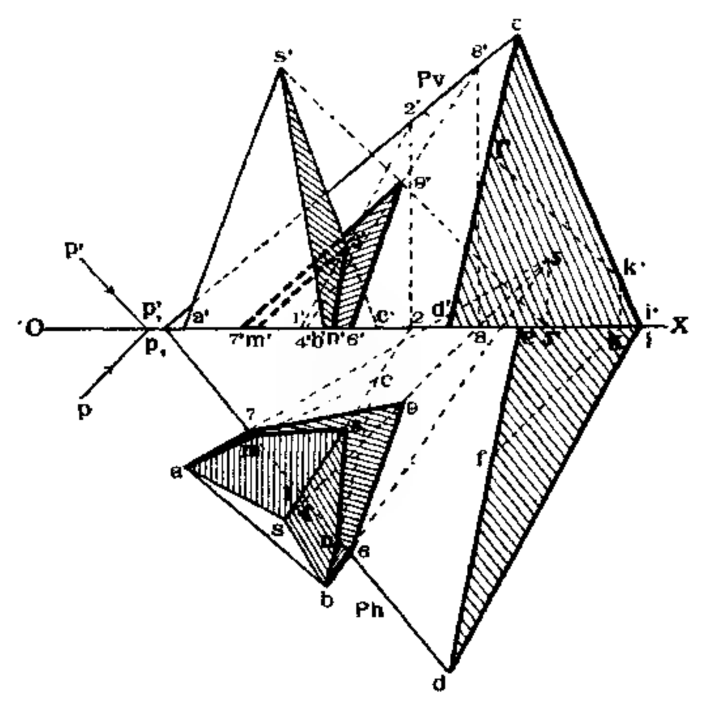
Замѣчаемъ точки M и N сѣченія сторонъ AC и BC основанія пирамиды со слѣдомъ Ph.

Линія $M3N$ будетъ служить линіей сѣченія пирамиды съ плоскостью P. Строимъ тѣнь **5** отъ вершины S на заднюю полу H и соединяемъ точку **5** съ A и B.

Части $a7$ и $b6$ линій $a5$ и $b5$ отъ точекъ a и b до точекъ 7 и 6 пересѣченія $a5$ и $b5$ съ Ph будутъ служить видимыми тѣнями отъ реберъ SA и SB на H.

Находимъ теперь тѣнь отъ вершины S на плоскость P. Проводимъ черезъ S лучъ S**5** и опредѣляемъ точку **9** пересѣченія его съ P. Для этого служитъ вспомогательная линія **48** сѣченія P съ плоскостью, проектирующей лучъ S**5** на B.

Точка **9** и будетъ служить тѣнью отъ S на P. Соединяемъ точки **7** и **8** съ точкою **9**. Линіи **79** и **69** будутъ служить тѣнями отъ реберъ AS и BS на P



Черт. 216.

Контуромъ падающей тѣни отъ пирамиды на H и P будетъ являться линія A**796**B.

Въ собственной тѣни будутъ грани SAC и SDC.

Построимъ теперь тѣнь отъ линіи DE плоскости P. Для этого выбираемъ на DE случайную точку F и опредѣляемъ тѣнь K отъ нея на V. Соединяя k' съ e', получаемъ линію $e'k'i'$ тѣнь отъ DE на V. Линія же di будетъ тѣнью отъ DE на H. Тѣни отъ P на V и H на чертежѣ 216 заштрихованы.

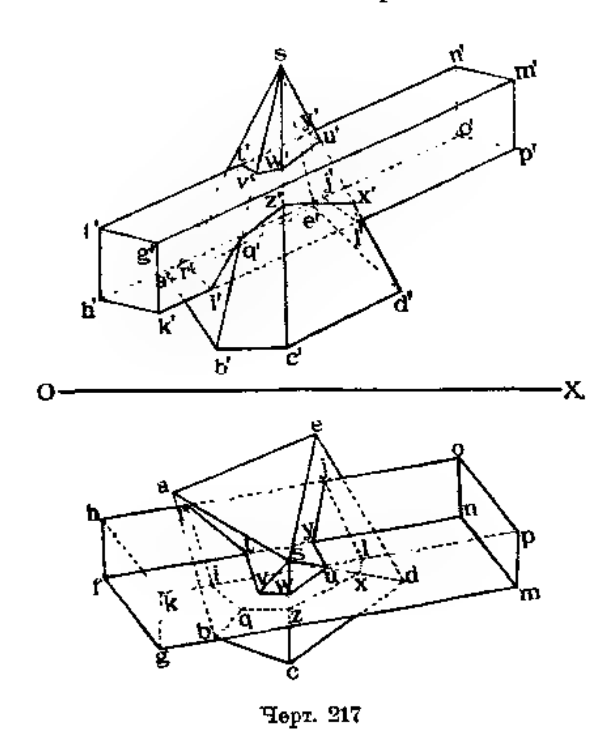
Перейдемъ теперь къ общему случаю построенія тѣней для двухъ непересѣкающихся многогранниковъ.

Пусть даны (чертежъ 217) два пересѣкающихся многогранника: пирамида $SABCDE$ и призма $FGKHONMP$, и построена линія $RIQZXLJYUWVT$ ихъ сѣченія.

Требуется построить тѣни.

Задачу эту раздѣляемъ на слѣдующія части:

1) Опредѣленіе собственныхъ тѣней призмы.



Черт. 217

2) Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на V и H.

3) Опредѣленіе собственныхъ тѣней пирамиды.

4) Построеніе тѣней, падающихъ отъ пирамиды на V и H.

4) Построеніе тѣней, падающихъ отъ пирамиды на призму.

6) Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на пирамиду.

1. Опредѣленіе собственныхъ тѣней призмы.

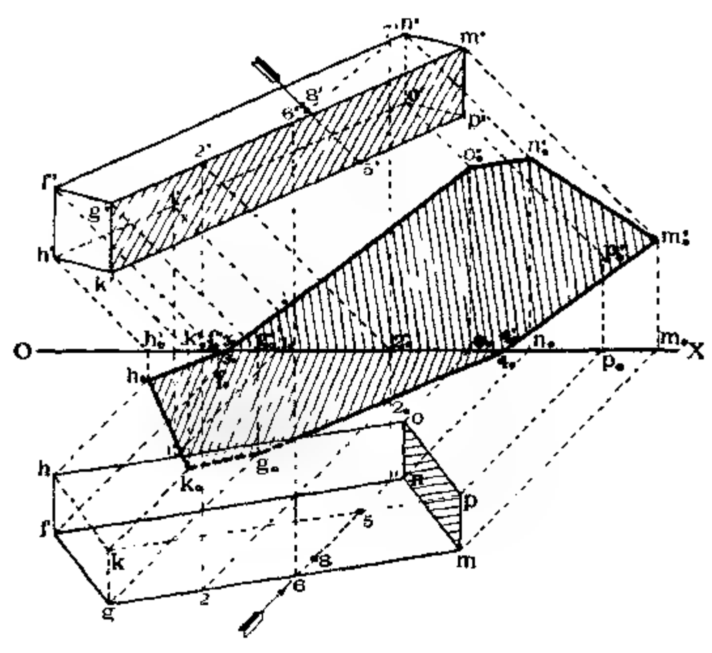
Проводимъ черезъ точку **5** ребра KP призмы (черт. 218) лучъ, и опредѣляемъ точку **8** пересѣченія его съ призмой. Для этого служить вспомогательная линія сѣченія **67** грани $FGMN$ съ плоскостью, проектирующей лучъ на H.

Такъ какъ точка **8** лежитъ ближе къ источнику свѣта, нежели точка **5**, то послѣдняя будетъ въ собственной тѣни, а слѣдовательно, въ тѣни будутъ и ребро KP и грани $GKPM$ и $HKPO$.

Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить, что въ собственной тѣни будетъ находиться и грань $MNOP$ призмы. Контуромъ собственной тѣни призмы будетъ служить линія $GKHONMG$.

2. Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на V и H.

Контуромъ тѣни, падающей отъ призмы на V и H будетъ служить тѣнь отъ контура собственной тѣни призмы, т. е. отъ линіи $GKHONMG$ (черт. 218). Строимъ тѣни отъ точекъ этой линіи, какъ это было уже



Черт. 218.

ранѣе объяснено для линіи DE на черт. 213, и соединяемъ полученныя точки между собою. Линія $G_0K_0H_0\mathbf{3}_0O_0N_0M_0\mathbf{4}_0G_0$ будетъ служить контуромъ подающей тѣни, часть которой располагается на H, а часть на V.

3. Опредѣленіе собственныхъ тѣней пирамиды.

Эта задача рѣшается такъ же, какъ и для призмы. Въ нашемъ случаѣ въ тѣни оказывается лишь ребро DE пирамиды и грани ея $ADCDE$ и SDE (черт. 219). Контуромъ собственной тѣни пирамиды будетъ служить линія $SEABCDS$.

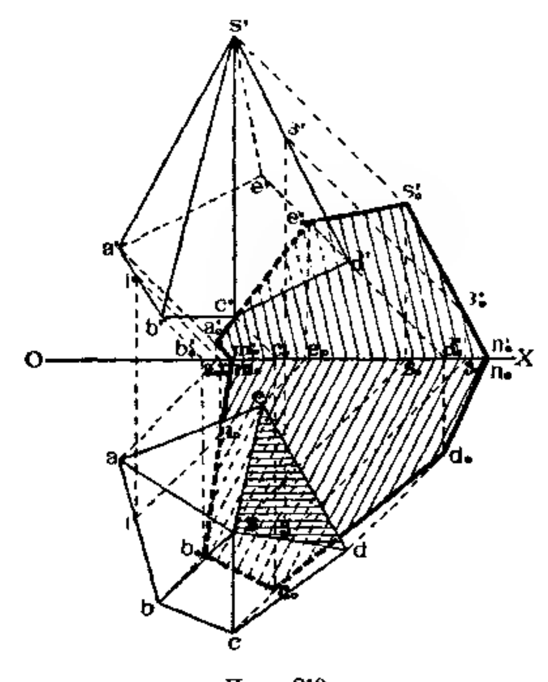
4. Построеніе тѣней, падающихъ отъ пирамиды на V и H.

Контуромъ тѣни, падающей отъ пирамиды на V и H будетъ служить (черт. 219) тѣнь отъ контура собственной тѣни пирамиды, т. е. отъ ли-

ніи $SEADCDS$. Строимъ тѣнь $S_0E_0A_0M_0B_0C_0D_0N_0S_0$ отъ этой линіи. Часть тѣни, падающей отъ пирамиды, будетъ на V и часть на H.

5. Построеніе тѣней, падающихъ отъ пирамиды на призму.

Этой тѣнью, очевидно, будетъ служить тѣнь, падающая на призму отъ контура $SEABCDS$ собственной тѣни пирамиды (черт. 220). Въ частности же на призму будетъ падать лишь тѣнь отъ части SU ребра SD пирамиды.



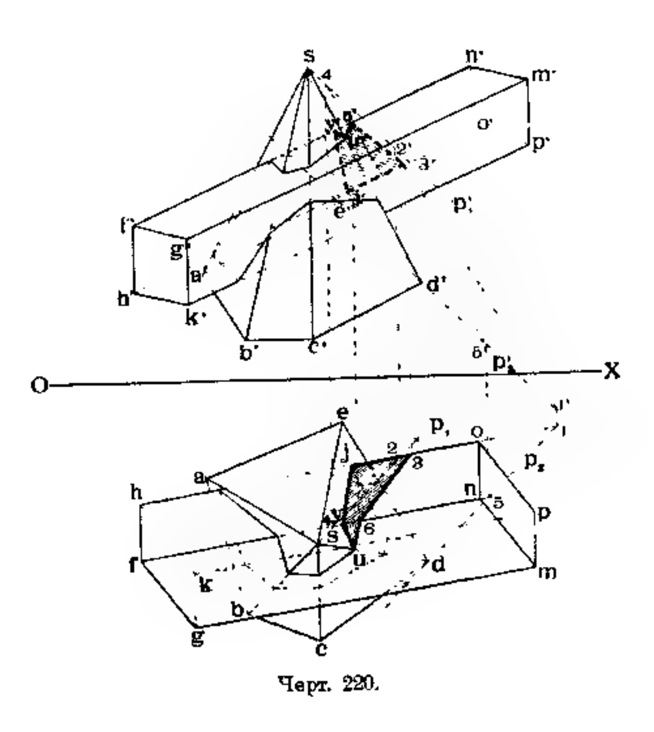
Черт. 219.

Проведемъ черезъ точки S и D ребра SD лучи SP_1 и DP_2, найдемъ пересѣченіе реберъ HO и FN призмы съ лучевой плоскостью SDP_1P_2. Ребро HO пересѣчетъ эту плоскость въ точкѣ **3**, для построенія котораго служитъ вспомогательная линія **12** сѣченія лучевой плоскости съ плоскостью, проектирующей ребро HO на горизонтальную плоскость проекцій. Ребро FN пересѣчетъ лучевую плоскость въ точкѣ **6**, для построенія которой служитъ вспомогательная линія **45** сѣченія лучевой плоскости съ плоскостью, проектирующей ребро FN на H.

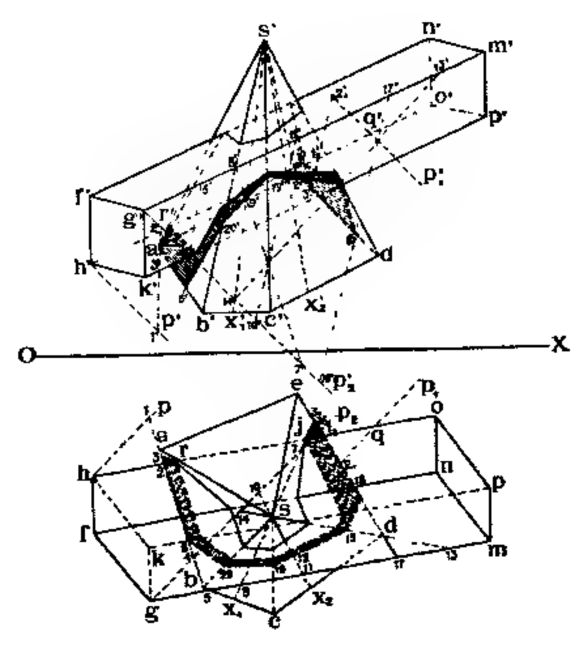
Линія UVJ**36**U и будетъ служить контуромъ тѣни, падающей отъ пирамиды на призму.

6. Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на пирамиду (черт. 221).

Контуромъ тѣни, падающей отъ призмы на пирамиду будетъ служить



Черт. 220.



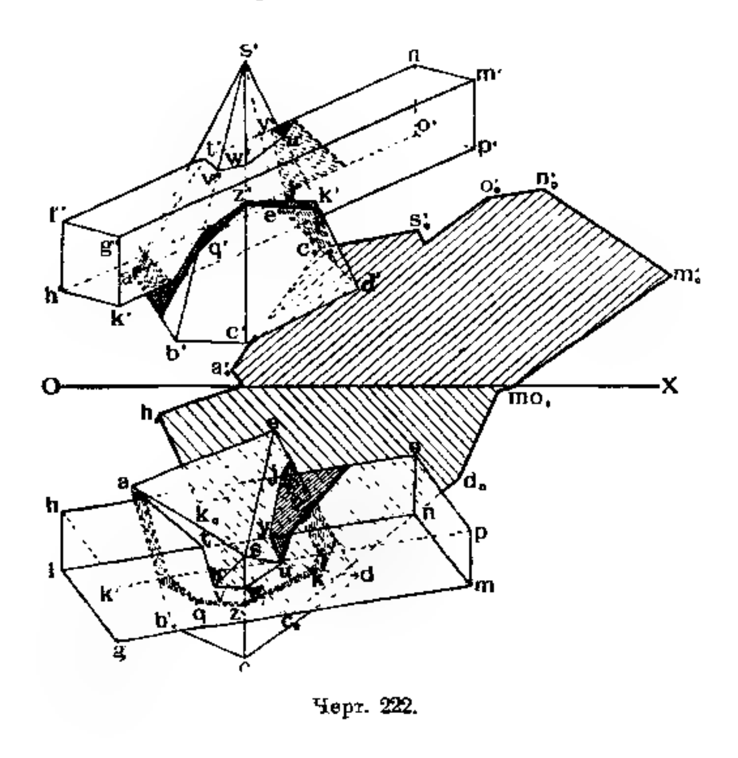
Черт. 221.

тѣнь, падающая на пирамиду отъ контура $GKHONMG$ собственной тѣни призмы.

Изъ разсмотрѣнія взаимнаго расположенія призмы и пирамиды можно предположить, что на пирамиду будутъ падать тѣни лишь отъ реберъ HO и GM призмы.

Проводимъ черезъ ребро HO лучевую плоскость и находимъ точки $\mathbf{3}$ и $\mathbf{3}_1$ пересѣченія этой плоскости съ ребрами AB и BE перамиды (вспомогательныя линіи $\mathbf{1,2}$ и $\mathbf{1}_1\mathbf{2}_1$.

Линіи $B\mathbf{3}$ и $J\mathbf{3}$, будутъ служить тѣнями, падающими отъ ребра HO на грани SAB и SDE пирамиды.



Черт. 222.

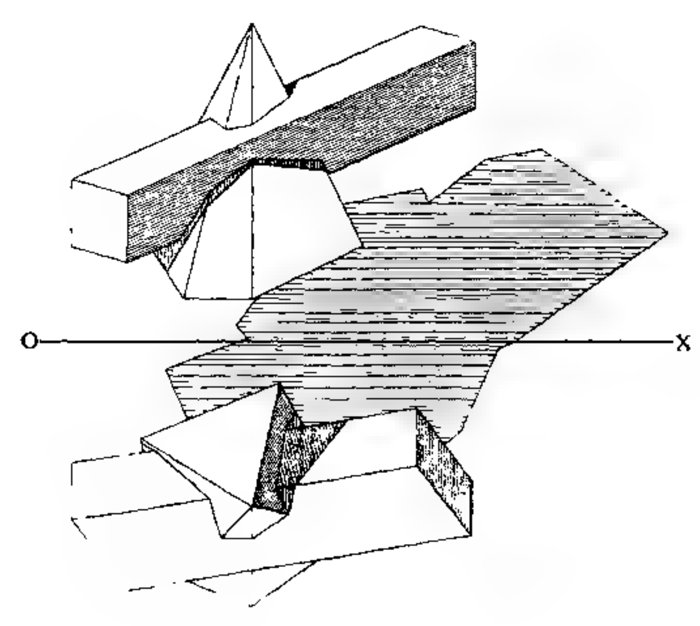
Далѣе проводимъ черезъ ребро GM призмы лучевую плоскость и находимъ линію пересѣченія ея съ гранями пирамиды. Эта линія и будетъ служить тѣнью отъ ребра GM на пирамиду.

Для построенія этой линіи послѣдовательно опредѣлаются слѣдующія точки:

Точка **6** пересѣченія ребра AB съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **4**, **5**).

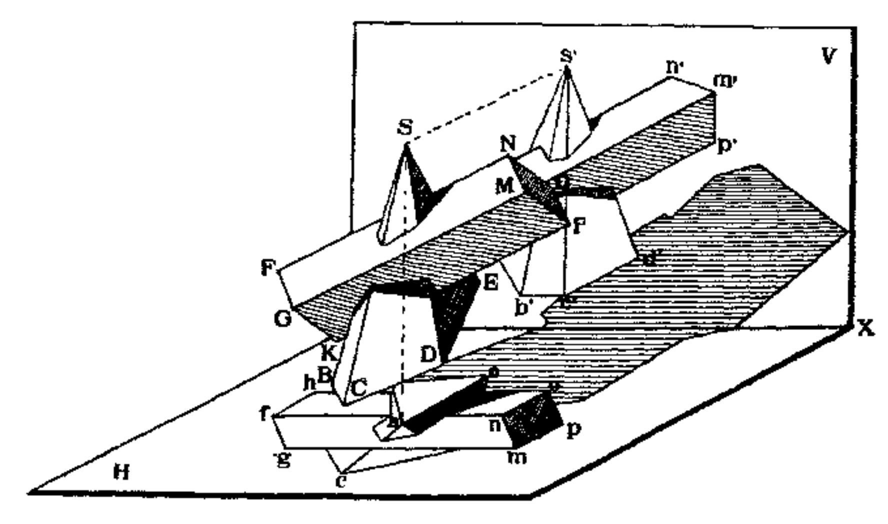
Точка **9** пересѣченія линіи SX_1, лежащей въ грани SBC, съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **7**, **8**).

Точка **12** пересѣченія линіи SX_2, лежащей въ грани SCD, съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **10, 11**).



Черт. 223.

Точка **15** пересѣченія ребра SD съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **13, 14**) и

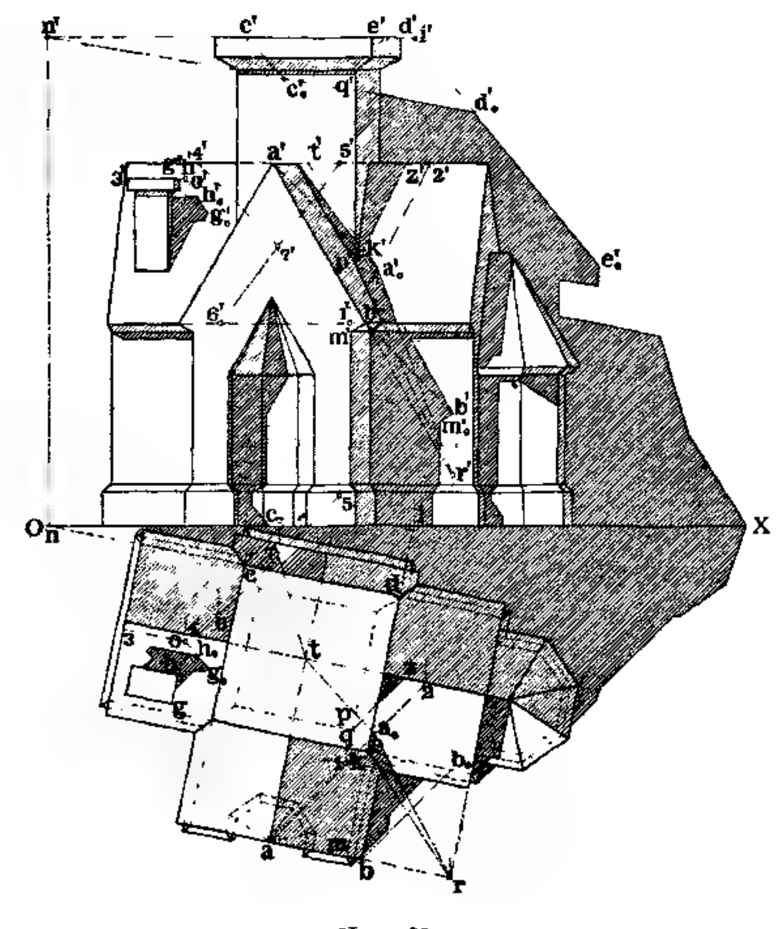


Черт. 224.

Точка **18** пересѣченія ребра DE съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **16, 17**).

Полученныя точки соединяются между собой въ слѣдующемъ порядкѣ:

18 съ **15**, **15** съ **12** и эта линія продолжается до пересѣченія съ ребромъ SC въ точкѣ **19**, которая соединяется съ точкою **9**. Линія **19, 9**



Черт. 225.

продолжается до пересѣченія съ ребромъ SB въ точкѣ **20**, которая соединяется съ точкою **6**.

На чертежѣ 221 проекціи тѣни, падающей отъ пирамиды на призму, заштрихованы.

На черт 222 показаны видимыя или невидимыя части обоихъ тѣлъ и ихъ всѣхъ тѣней, а на черт. 223 изображены лишь видимыя части тѣлъ и тѣней.

На черт. 224 изображены модели плоскостей проекцій и пересѣкающихся призмы и пирамиды, при чемъ послѣднія построены по разверткамъ ихъ поверхностей. Модели освѣщены лучами свѣта, параллельными принятому направленію. На этомъ чертежѣ показаны также и проекціи пересѣкающихся поверхностей [1]).

Задача № 23. На черт. 225 изображено зданіе въ планѣ и фасадѣ. Построить собственныя и падающія тѣни.

Рѣшеніе.

Построимъ тѣнь отъ вершины A на крышу. Для этого проводимъ черезъ A лучъ и находимъ его пересѣченіе A_0 съ крышей, для чего служитъ вспомогательная линія 12

Соединяемъ точку A_0 съ точкой T пересѣченія коньковъ крышъ. Линія A_0T будетъ служить тѣнью отъ конька AT на скатъ крыши. Соединяя точку A_0 съ точкой R пересѣченія карнизовъ наклонныхъ крышъ, получимъ тѣнь A_0R отъ ребра AR на скатъ крыши

Тѣнь отъ вертикальнаго ребра PQ башни на скатъ крыши пойдетъ въ планѣ по линіи pz, наклоненной къ OX подъ угломъ въ 45°. Переносимъ точки p и z на V въ точки p', z'. Линія PZ будетъ искомой тѣнью отъ PQ на крышу.

Проводимъ изъ B и A лучи до пересѣченія ихъ со стѣной дома въ точкахъ K и B_0. Линія KB_0 будетъ тѣнью отъ AB на стѣну дома. Тѣнь B_1M_0 на ту же стѣну отъ BM будетъ равна и параллельна BM. Построеніе дальнѣйшей тѣни на стѣну дома не представляетъ затрудненій.

Тѣнь отъ башни на V строимъ слѣдующимъ образомъ:

Тѣнь отъ угла ея C будетъ въ C_0

Соединяемъ C_0 съ точкой N — слѣдомъ края CD на V. Линія NC_0D_0 будетъ тѣнью отъ CD на V. Соединяя точку D_0 съ I—слѣдомъ DE на V, получимъ линію ID_0E_0—тѣнь отъ DE на V Построеніе остальныхъ точекъ тѣни падающей на V и H производится подобнымъ же образомъ, на основаніи общихъ правилъ,

Тѣнь отъ трубы на крышу строится слѣдующимъ образомъ.

Находимъ точку O пересѣченія края GH трубы съ крышей и черезъ O проводимъ линію $OH_0G_0 \mid TA_0$, такъ какъ тѣни отъ GH и ей параллельной AT на одну и ту же плоскость должны быть параллельны между собой.

Подобнымъ же образомъ находимъ тѣни на крышу и отъ остальныхъ точекъ трубы.

На чертежѣ показано еще построеніе тѣни $T7$ отъ конька $T4$ на скатъ крыши, для чего построена тѣнь отъ точки 4 на этотъ скатъ (вспомогательная линія 56).

Возстановить построеніе остальныхъ точекъ показанныхъ тѣней мы предоставляемъ читателю.

---

[1]) Примѣненіе теоріи тѣней на практикѣ имѣетъ мѣсто при проектированіи оконъ гражданскихъ сооруженій, при опредѣленіи высоты домовъ въ зависимости отъ ширины улицъ, при проектированіи свѣтовыхъ двориковъ и т. п.

Подробности см. Н. Рынинъ: „Дневной свѣтъ и разсчеты освѣщенности помѣщеній“. СПБ. 1908. Изданіе Инст. Инж. П. С. и Его-же, „Ослабленіе силы дневного свѣта, проходящаго черезъ стекла разныхъ сортовъ“, Извѣстія Собр. Инж. Пут. Сообщ. 1908 г. № 1. Затѣмъ „Журналъ технич. совѣщанія упр-нія жел. дорогъ по Техн. Отдѣлу отъ 21 апр. 1908 г. № 63.

ЧАСТЬ II.

Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей.

§ 16. Плоскія кривыя линіи.

Всѣ кривыя линіи могутъ быть раздѣлены на два класса: 1) линіи, всѣ элементы которыхъ лежатъ въ одной и той же плоскости, или *кривыя плоскія*, напримѣръ, кругъ, эллипсъ и т. п. и 2) линіи, элементы которыхъ въ одной плоскости не лежатъ, или *кривыя двоякой кривизны*, напримѣръ, винтовыя линіи.

Разсмотримъ построеніе проекцій кривыхъ линіи и начнемъ съ плоскихъ кривыхъ.

а) *Проектированіе случайныхъ кривыхъ линій.*

Докажемъ слѣдующую теорему, относящуюся къ кривымъ обоихъ классовъ.

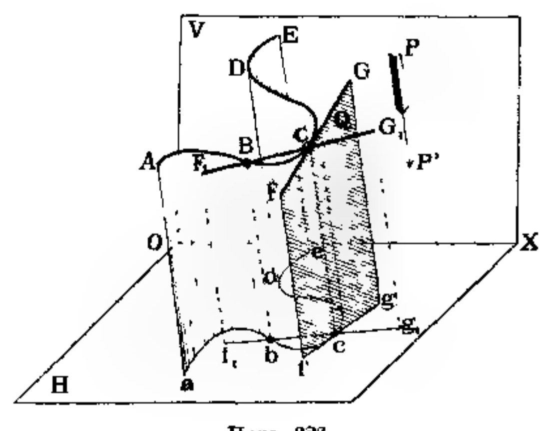
Теорема 16. Если прямая линія касается въ пространствѣ кривой линіи въ нѣкоторой точкѣ, то, при любомъ направленіи проектированія на любую плоскость, проекція прямой касается проекціи кривой въ точкѣ, которая является проекціей вышеупомянутой точки касанія линій въ пространствѣ.

Доказательство.

Пусть дана въ пространствѣ случайная кривая линія $ABCDE$ (чертежъ 226), и въ точкѣ C проведена къ ней касательная FG. Эту послѣднюю можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе сѣкущей F_1CG_1, при приближеніи точки пересѣченія B къ C до безконечно малаго разстоянія. Спроектируемъ кривую, сѣкущую и касательную на какую нибудь плоскость H при направленіи проектированія PP_1. Проекціей кривой будетъ кривая линія $abcde$, проекціей сѣкущей F_1CG_1 будетъ линія f_1cg_1, которая будетъ пересѣкать проекцію кривой въ точкахъ b и c —

проекціяхъ точекъ B и C. При приближеніи точки B къ C проекція b будетъ приближаться къ проекціи c и въ предѣлѣ сольется съ c, а сѣкущая f_1cg_1 превратится въ касательную fg къ проекціи кривой, что и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что совокупность линій, проектирующихъ кривую $ABCDE$, образуетъ цилиндрическую поверхность, а совокупность линій, проектирующихъ касательную FG, образуетъ плоскость, касательную къ упомянутой цилиндрической поверхности по линіи, проектирующей точку касанія.



Черт. 226.

Проекціи плоскихъ кривыхъ линій строятся также, какъ и плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ прямыми линіями (стр. 87). Общій пріемъ построенія проекцій кривой линіи даннаго вида заключается въ слѣдующемъ: Плоскость P, въ которой должна лежать кривая линія, совмѣщается съ H или съ V, затѣмъ на H или V строится истинная фигура кривой и, наконецъ, плоскость P съ кривой возвращается въ прежнее положеніе.

Прослѣдимъ примѣненіе этого метода на примѣрѣ.

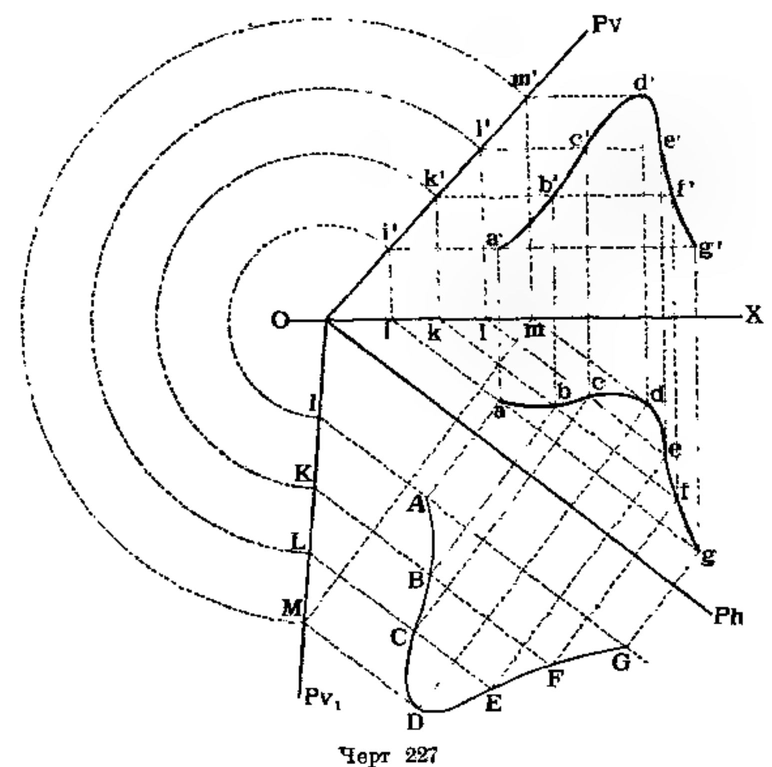
Предположимъ, что требуется построить въ нѣкоторой плоскости P какую нибудь кривую линію $ABCDEFG$, истинный видъ который извѣстенъ (черт. 227).

Для рѣшенія этой задачи совмѣщаемъ P съ H и строимъ на H истинную фигуру $ABCDEFG$ данной кривой линій. Проводимъ черезъ точки ея рядъ линій GAI, FBK и т. д. параллельныхъ Ph. Возвращаемъ плоскость P со всѣми проведенными въ ней линіями въ прежнее положеніе. Проекціи любой точки A кривой линіи найдутся слѣдующимъ образомъ:

Проводимъ изъ A линію $Aa \perp Ph$ до пересѣченія съ $ia \parallel Ph$. Далѣе проводимъ $aa' \perp OX$ до пересѣченія съ $i'a' \parallel OX$.

Точки a, a' и будуть проекціями точки A кривой.

Подобнымъ же образомъ строимъ проекціи остальныхъ точекъ кривой



Черт 227

и соединяемъ ихъ плавными кривыми $abcdefg$ и $a'b'c'd'e'f'g'$, которыя и будутъ проекціями искомой кривой линіи [1]).

b) *Приближенныя построенія.*

При различнаго рода геометрическихъ построеніяхъ приходится рѣшать рядъ задачъ, которыя допускаютъ лишь извѣстную точность построеній, точность, зависящую отъ разныхъ условій: отъ совершенства чертежныхъ инструментовъ, отъ количества выбранныхъ точекъ, отъ умѣнья обчерчивать ихъ по лекалу, и, наконецъ, отъ невозможности иногда имѣть математически точное рѣшеніе данной задачи, какъ напримѣръ, спрямленіе дуги круга.

Ниже мы проводимъ нѣсколько примѣровъ приближенныхъ построеній, позволяющихъ рѣшать подобныя задачи съ извѣстной точностью.

Рѣшимъ такую задачу: Дана кривая линія $ABC\ldots OP$ случайнаго вида (черт. 228). Опредѣлить ея длину.

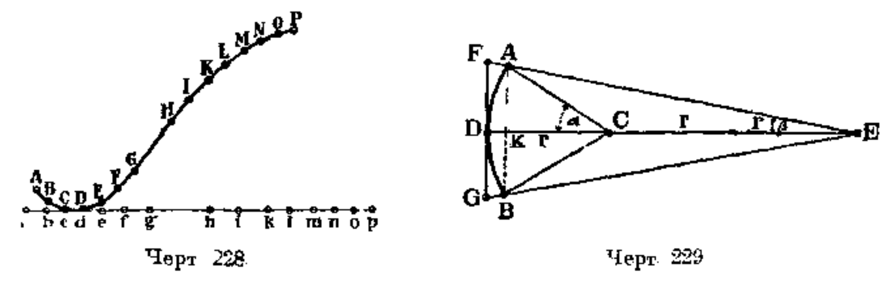
Раздѣлимъ кривую точками $B, C, D\ldots$ на части, которыя съ достаточной для практики точностью могли бы быть приняты за прямыя линіи. Такимъ образомъ мы замѣняемъ кривую линію вписанной въ нее ломанной линіей. Проведемъ черезъ

[1]) О примѣненіи различнаго рода плоскихъ кривыхъ въ техникѣ, см. F. Ebner. „Leitfaden der Technisch—Wichtigen Kurven". Leipzig 1906.

одинъ изъ такихъ прямолинейныхъ элементовъ CD прямую линію и отложимъ вдоль этой прямой влѣво и вправо отъ CD отрѣзки $bc = BC$, $ab = AB$, $de = DE$ и т. д., равныя соотвѣтственнымъ частямъ ломанной линіи.

Сумма всѣхъ этихъ отрѣзковъ, равная ap, и дастъ приближенную длину кривой AP.

Если приходится выпрямить часть дуги круга, то задачу можно рѣшить болѣе точно. Пусть, напримѣръ, (черт. 229) требуется выпрямить дугу ADB окружности круга. Проведемъ хорду AB и опустимъ изъ центра C круга перпендикуляръ къ



Черт. 228. Черт. 229.

AB. Отложимъ отъ точки D, пересѣченія этого перпендикуляра съ дугою AB, вдоль него вправо отрѣзокъ DE, равный тремъ радіусамъ круга, и соединимъ точку E съ точками A и B.

Далѣе проведемъ черезъ точку D касательную къ дугѣ AB до пересѣченія съ продолженіями линій AE и BE въ точкахъ F и G. Отрѣзокъ FG и можно принять съ достаточной для практики точностью равнымъ длинѣ дуги ADB. Дѣйствительно, изъ чертежа имѣемъ.

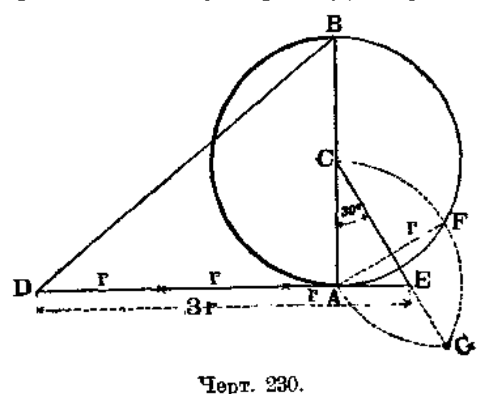
$$FD = 3r\,tg\,\beta,\quad tg\,\beta = \frac{AK}{2r + CK} = \frac{r \sin\alpha}{2r + r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2 + \cos\alpha};\quad FD = \frac{3r\sin\alpha}{2 + \cos\alpha}.$$

$$AD = \frac{2\pi r\alpha}{360}.$$

Въ нижеслѣдующей таблицѣ даны значенія FD и AD въ частяхъ радіуса r для нѣкоторыхъ угловъ α.

α	FD	AD	$AD - FD$
10°	0,1745	0,1745	0
20	0,3490	0,3491	0,0001
30	0,5234	0,5236	0,0002
40	0,6972	0,6981	0,0009
50	0,8696	0,8727	0,0031
60	1,0392	1,0472	0,0080
90	1,5000	1,5708	0,0708

Этимъ способомъ можно пользоваться съ достаточной для практики точностью при углахъ α не болѣе 40°. Описанный способъ, принадлежащій кардиналу Николаю Куза, даетъ все меньшую и меньшую точность, по мѣрѣ увеличенія центральнаго угла дуги круга. Для спрямленія дуги полукруга ($2\alpha = 180°$), лучше примѣнять нижеслѣдующій способъ, предложенный Коханскимъ [1].



Черт. 230.

Пусть требуется спрямить дугу AB полуокружности круга (черт 230). Проведемъ въ точкѣ A касательную къ кругу Изъ центра C проведемъ прямую CE подъ угломъ 30° къ діаметру AB. Для этого достаточно соединить точку C съ G, причемъ G построена слѣдующимъ образомъ:

$$AF = AG = FG = AC = r.$$

Замѣтимъ точку E пересѣченія CE съ проведенной ранѣе касательной и отложимъ $ED = 3r$. Прямая BD и будетъ приблительно равна длинѣ дуги AB

Дѣйствительно:

$$BD^2 = AB^2 + (DE - AE)^2 = (2r)^2 + (3r - r\,tg\,30°)^2 = [4 + (3 - tg\,30°)^2]\,r^2;$$
$$BD = 3{,}14169\,r.$$

Разность между длинами прямой BD и дуги AB равна

$$(3{,}14169 - 3{,}14159)\,r = 0{,}0001\,r.$$

Способъ Николая Куза можно примѣнить и для рѣшенія обратной задачи Навернуть на дугу круга даннаго радіуса отрѣзокъ прямой данной длины.

Для этого (черт. 229) проводимъ въ серединѣ даннаго отрѣзка FG прямую $DE \perp FG$ и откладываемъ $DE = 3r$. Соединяемъ точки F и G съ E и замѣчаемъ точки A и B пересѣченія линій FE и GE съ дугою круга даннаго радіуса r, касательнаго къ EG въ точкѣ D. Длина дуги ADB и будетъ приблизительно равна отрѣзку FG.

Замѣтимъ опять, что способъ Николая Куза примѣняется при углѣ α не болѣе 40°. Если $\alpha > 40°$, то слѣдуетъ данную длину FG раздѣлить на равныя части такъ, чтобы $\alpha < 40°$ и найти дугу круга по длинѣ равную части прямой FG.

Разсмотримъ теперь примѣненіе къ рѣшенію задачъ кривыхъ ошибокъ. Подъ названіемъ *кривой ошибокъ* [2]) понимаютъ вспомогательную кривую, которая служитъ для опредѣленія такихъ точекъ или линій, непосредственно которыя построить трудно или невозможно.

Напримѣръ, рѣшимъ такую задачу:

Дана кривая $ABC...A$ (черт. 231), и къ ней проведена касательная HI. Опредѣлить, по возможности точнѣе, точку касанія.

Если мы проведемъ серію хордъ, параллельныхъ касательной, то точка касанія будетъ соотвѣтствовать хордѣ, равной нулю. Чтобы получить эту точку, проводимъ

---

[1]) T. Vahlen «Konstruktionen und Approximationen» Leipzig. 1911. St. 310.

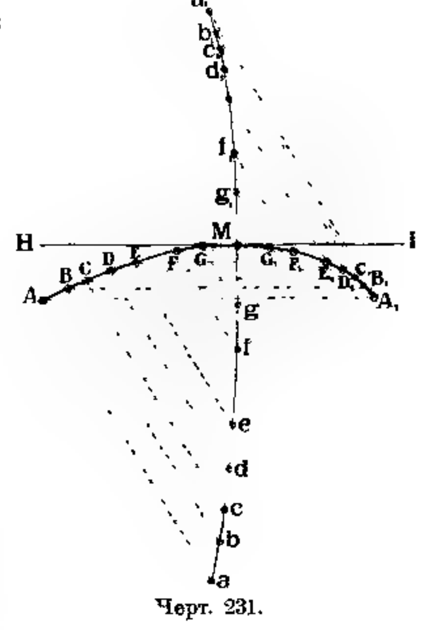
[2]) «Exercices de Geometrie Deschriptive». Par F. J. Paris 1893.

черезъ точки $ABC...$ линіи, параллельныя другъ другу, въ произвольномъ направленіи. Отложимъ на этихъ прямыхъ длины пропорціональныя или равныя длинамъ хордъ.

Напримѣръ, пусть $Aa = A_1a_1 = AA_1$; $Bb = B_1b_1 = BB_1$ и т. д.

Соединимъ концы полученныхъ отрѣзковъ плавной кривой $abcd...b_1a_1$, которая и называется кривой ошибокъ.

Точка M пересѣченія этой кривой съ данной и будетъ искомой точкой касанія.

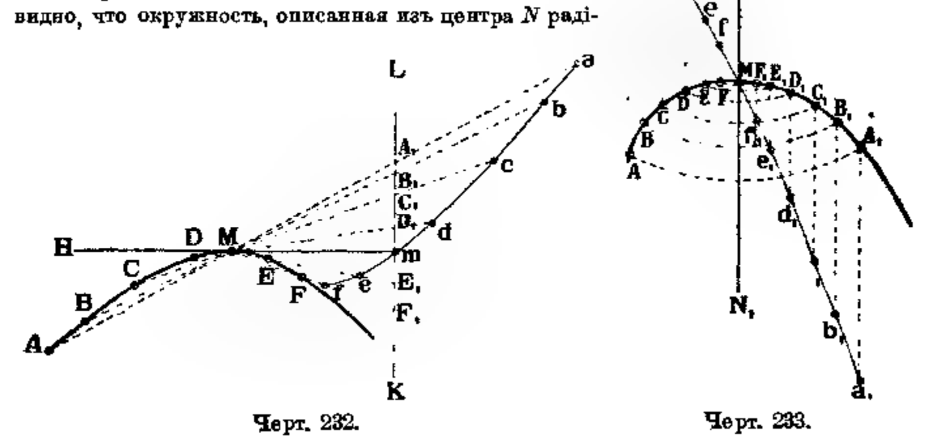


Черт. 231.

Рѣшимъ слѣдующую задачу. Дана кривая $ABCDEF$ и точка M на ней (черт. 232). Провести въ M прямую, касательную къ кривой. Касательная къ кривой въ данной точкѣ M есть, очевидно, сѣкущая, хорда которой безконечно мала. Проведемъ какую нибудь линію LK, приблизительно перпендикулярную къ предполагаемому направленію касательной Далѣе проведемъ рядъ сѣкущихъ AMA_1, BMB_1, CMC_1, DMD_1, MEE_1, MFF_1 и отложимъ $A_1a = AM$; $E_1b = EM$; $C_1c = CM$ и $E_1e = ME$ и т. д. Соединяя полученныя точки a, b, $c...e$. f плавной кривой, получимъ кривую ошибокъ, пересѣченіе которой съ прямою LK дастъ точку m, опредѣляющую съ точкой M искомую касательную, такъ какъ для точки m хорда равна нулю.

На чертежѣ 233 показанъ еще примѣръ примѣненія кривой ошибокъ въ рѣшенію слѣдующей задачи:

Дана кривая $AEC...B_1A_1$ и точка N внѣ ея. Провести изъ N нормаль къ кривой. Предположимъ, что задача рѣшена и NM есть искомая нормаль. Очевидно, что окружность, описанная изъ центра N радіусомъ NM, будетъ касаться кривой въ точкѣ пересѣченія послѣдней съ нормалью. Такимъ образомъ, хорда сѣченія круга радіуса NM съ кривой AA_1 будетъ безко-



Черт. 232. Черт. 233.

нечно мала. Чтобы построить кривую ошибокъ, проходящую черезъ M, достаточно описать изъ точки N, какъ изъ центра, рядъ круговъ, которые дадутъ хорды AA_1, BE_1 и т. д. (хорды эти на чертежѣ, во избѣжаніе затемнѣнія его, не показаны).

Затѣмъ построимъ перпендикуляры къ этимъ хордамъ въ концахъ ихъ и отложимъ на этихъ перпендикулярахъ отрѣзки

$$Aa = A_1a_1 = AA_1; \quad Bb = E_1b_1 = BB_1$$

и т. д.

Соединяя полученныя точки плавной кривой, получимъ кривую ошибокъ, пересѣченіе которой съ кривой AA_1 дастъ точку M, опредѣляющую съ точкой N искомую нормаль NN_1.

---

c) *Проекціи круга.*

Очень часто при рѣшеніи различныхъ задачъ въ ортогональныхъ проекціяхъ приходится строить проекціи круга. Послѣдній проектируется въ кругъ на V и H лишь тогда, когда его плоскость параллельна или V или H. Въ остальныхъ случаяхъ онъ будетъ на V и H проектироваться въ видѣ эллипса.

Въ частномъ случаѣ, когда плоскость круга перпендикулярна къ плоскости проекцій, онъ на эту плоскость спроектируется въ прямую линію.

Для вычерчиванія такого эллипса, какъ проекціи круга, приходится строить рядъ его точекъ и затѣмъ соединять ихъ плавной кривой по лекалу.

Покажемъ три способа, при помощи которыхъ можно построить проекцію круга въ видѣ эллипса на любую плоскость при любомъ направленіи проектированія.

1-й способъ. Пусть данъ кругъ $ABDE$ (черт. 234 слѣва). Опишемъ вокругъ него квадратъ $FGHI$ и проведемъ діагонали квадрата FH и GI. Діагонали эти пересѣкутъ кругъ въ точкахъ K, L, M, N. Нетрудно показать, что каждая изъ этихъ точекъ раздѣлитъ полудіагональ на части, отношеніе между которыми мы можемъ съ достаточной для практики точностью принять равнымъ 0,7 (точнѣе (0,70711).

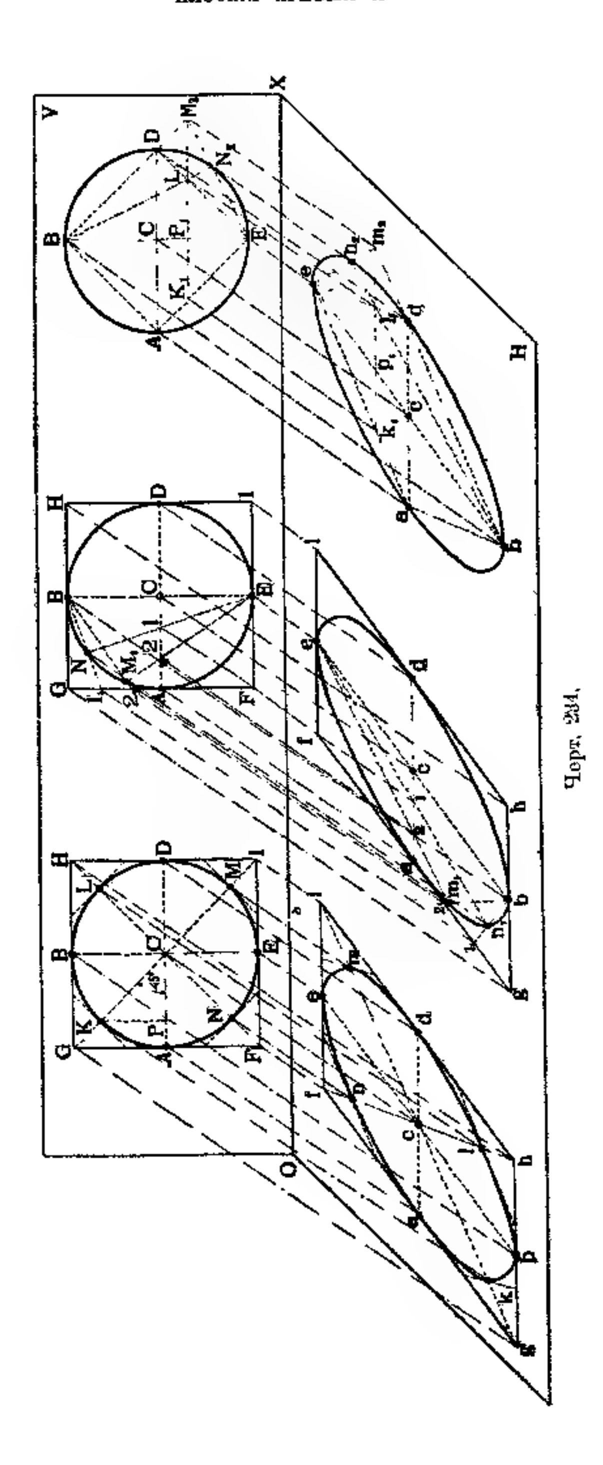
Доказать это можно слѣдующимъ образомъ: опустимъ изъ точки K перпендикуляръ KP на діаметръ параллельный GH. Изъ подобія треугольниковъ AGC и PKC, имѣемъ:

$$\frac{KC}{GC} = \frac{KP}{GA};$$

но $GA = KC =$ радіусу круга; поэтому

$$\frac{KC}{GC} = \frac{KP}{KC} = \sin 45 = 0{,}70711 \text{ или } \infty 0{,}7,$$

что и требовалось доказать.



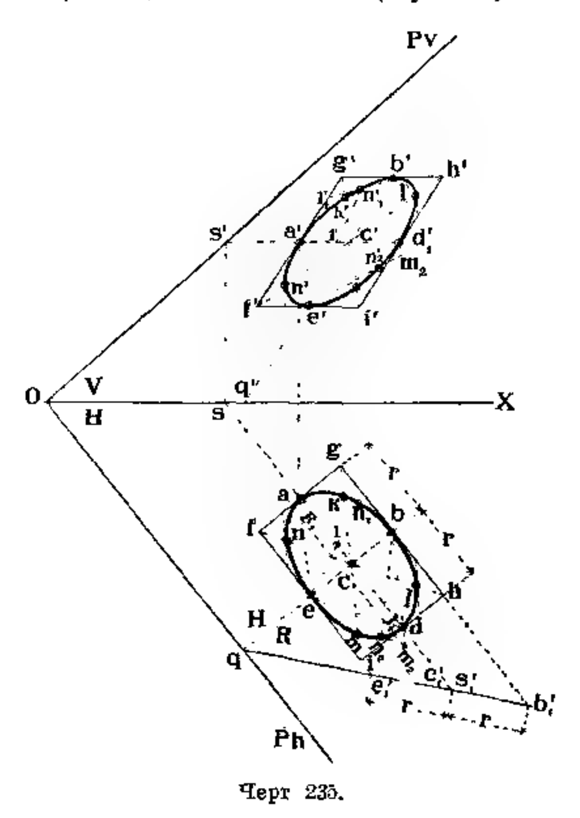
Черт. 234.

При любомъ параллельномъ проектированіи квадрата *FGHI* со вписаннымъ въ него кругомъ проекціи точекъ *K*, *L*, *M* и *N* раздѣлятъ проекціи діагоналей въ томъ же отношеніи 0,7.

Проведемъ въ точкахъ *K*, *L*, *M*, *N* линіи касательныя къ кругу. Эти линіи будутъ параллельны соотвѣтственнымъ діагоналямъ квадрата. Проекціи упомянутыхъ касательныхъ будутъ касательны къ эллипсу, проекціи круга, и будутъ параллельны проекціямъ діагоналей квадрата, что слѣдуетъ имѣть въ виду, при вычерчиваніи эллипса.

Примѣняютъ этотъ способъ къ построенію ортогональныхъ проекцій круга слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что даны плоскость *P* (черт. 235) и въ ней точка *C*.



Черт 235.

Требуется построить проекніи круга, лежащаго въ *P* съ центромъ въ точкѣ *C*.

Радіусъ круга данъ (r).

Поводимъ черезъ точку *C* горизонталь *CS* въ плоскости *P* и откладываемъ $ca = cd = r$.

Точки *A* и *D* будутъ концами діаметра *AD* круга. Проводимъ теперь

діаметръ EB перпендикулярный къ AD. При такихъ условіяхъ eb будетъ перпендикулярна къ ad.

Находимъ горизонтальный слѣдъ Q этого діаметра и строимъ вертикальную его проекцію $q'b'$. Концы его E и B опредѣляются слѣдующимъ образомъ: перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$ и спроектируемъ P на B. Проекціей P на B будетъ прямая линія qs_1', при чемъ.

$$cs_1' = ss'.$$

Діаметръ EB круга на B спроектируется безъ искаженія. Поэтому откладываемъ

$$c_1'e_1' = c_1'b_1' = r.$$

Переносимъ точки e_1' и b_1' въ систему $\frac{V}{H}$. Проекціями діаметра EB будутъ $e'b'$ и eb.

Проводимъ теперь черезъ точки E и B стороны квадрата параллельныя діаметру AD, а черезъ точки A и D стороны квадрата, параллельныя діаметру EB.

Проекціями квадрата, описаннаго вокругъ искомаго круга, будутъ $fghi$ и $f'g'h'i'$. Отмѣчаемъ теперь на проекціяхъ діагоналей квадрата точки k', l', m', n' и k, l, m, n, которыя дѣлили бы проекціи полудіагоналей въ отношеніи 0,7, напримѣръ, откладываемъ $c'k' = 0{,}7c'g'$; $cl = 0{,}7ch$ и т. д.

Имѣя теперь проекціи восьми точекъ круга, можно по лекалу соединить ихъ плавности кривыми, которыя будутъ эллипсами. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что обѣ проекціи круга должны быть касательными къ проекціямъ квадрата, описаннаго вокругъ круга, и къ проекціямъ линій, проведенныхъ черезъ точки K, L, M, N параллельно діагоналямъ квадрата.

Изъ числа такихъ линій на чертежѣ 235 показано двѣ, одна — проходящая черезъ точку N и другая черезъ точку L.

2-й способъ (черт. 234 средній кругъ).

Раздѣлимъ половину GA стороны квадрата на нѣсколько (на чертежѣ три) равныхъ частей:

$$G1_1 = 1_1 2_1 = 2_1 A$$

и перенумеруемъ концы отрѣзковъ цифрами 1_1, 2_1 и т. д., начиная отъ вершины G. На такое же число такихъ же частей дѣлимъ полудіаметръ AC, проходящій черезъ точку A стороны AG. Концы частей ($C1 = 12 = 2A$) обозначаемъ въ направленіи отъ точки C цифрами 1, 2, и т. д.

Далѣе соединяемъ точку B съ точками 1_1, 2_1 и т. д., а точку E съ точками 1, 2 и т. д. и замѣчаемъ точки пересѣченія линій, проходящія черезъ упомянутыя точки дѣленія, но при томъ такихъ линій, въ обозна-

ченіи которыхъ имѣются цифры одного и того же наименованія. Напримѣръ, отмѣчаемъ точки:

N_1 — пересѣченія $B1_1$ съ $E1$
M_1 » $B2_1$ съ $E2_1$ и т. д.

Нетрудно видѣть, что точки N_1, M_1 и др. будутъ принадлежать окружности круга, такъ какъ углы BN_1E, BM_1E будутъ прямыми.

На какую бы плоскость и при какомъ бы направленіи параллельнаго проектированія мы не спроектировали бы квадратъ $FGHI$, діаметры AD и BE и точки 1_1, 2_1, 1 и 2, проекціи линій $E1$, $E2$ и $B1_1$, $B2_1$ пересѣкутся въ точкахъ n_1 и m_1, которыя будутъ принадлежать эллипсу—проекціи круга $ABDE$.

На чертежѣ 235 такимъ способомъ построена точка N_1, причемъ:

$$g'1' = \frac{a'g'}{3}$$

и

$$c'1' = \frac{a'c'}{3}.$$

3-й способъ (черт. 234 справа).

Впишемъ въ кругъ квадратъ $ADDE$. Проведемъ случайную линію $K_1L_1 \parallel AD$ и замѣтимъ точки L_1 и M_2 пересѣченія ея со сторонами ED и BD.

Соединимъ точки E съ M_2 и B съ L_1. Точка N_2 пересѣченія линій EM_2 и BL_1 будетъ принадлежать окружности круга, такъ какъ уголь BNE является прямымъ и опирается на діаметръ BE. Доказательство этого слѣдуетъ изъ теоремы, что три перпендикуляра (ED, M_2P_1 и BN_2), опущенные изъ вершинъ треугольника (BEM_2) на противолежанція стороны, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Проектируя квадратъ $ABDE$ на любую плоскость, можно въ этой плоскости сдѣлать построенія, аналогичныя вышеуказаннымъ и найти точку n_2, принадлежащую эллипсу—проекціи круга.

Пусть $abde$ — параллелограммъ, являющійся проекціей квадрата $ABBE$; проводимъ $k_1l_1 \parallel ad$ и находимъ точки l_1 и m_2 пересѣченія kl_1 съ be и bd.

Соединяемъ e съ m_2 и b съ l_1. Точка n_2 пересѣченія линіи bl_1 съ em_2 и будетъ искомой.

На чертежѣ 235 подобнымъ способомъ построена точка n_2', n_2.

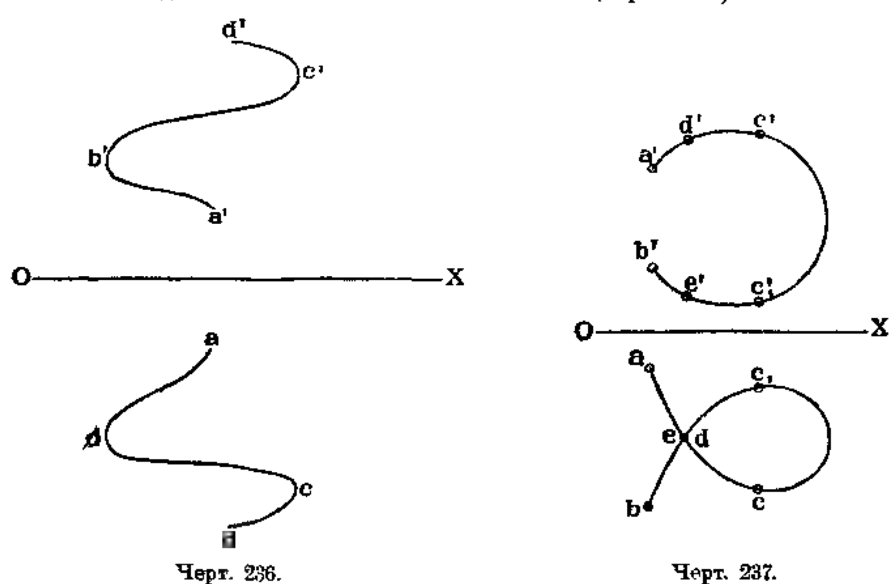
Проводимъ $k_1l_1 \parallel ad$. Находимъ точки l_1 и m_2 пересѣченія k_1l_1 съ ed и bd. Соединяемъ е съ m_2, а b съ l_1 и замѣчаемъ точку n_2 пересѣченія

линій em_2 съ bl_1. Точка n_2 и будетъ горизонтальной проекціей точки N_2 принадлежащей кругу. Вертикальная проекція n_2' найдется на линіи $e'm_2'$ [1]).

§ 17. Кривыя линіи двоякой кривизны.

а) Проектированіе случайныхъ кривыхъ линій.

Кривая линія двоякой кривизны задается двумя ея проекціями и обозначеніями одной или нѣсколькихъ ея точекъ (черт. 236). Обозначеніе



Черт. 236. Черт. 237.

точекъ въ проекціяхъ необходимо бываетъ тогда, когда можетъ возникнуть сомнѣніе, какая часть одной проекціи кривой соотвѣтствуетъ какой части другой проекціи. Напримѣръ, если не обозначать точекъ проекціи кривой, изображенной на чертежѣ 237, то является подобнаго рода неопредѣленность заданія: точка a горизонтальной проекціи можетъ соотвѣтствовать точкѣ b' вертикальной проекціи.

Обозначенія же, приведенныя на чертежѣ 237 устраняютъ эту неопредѣленность.

Если требуется опредѣлить истинную длину кривой линіи двоякой кривизны, то можно поступить слѣдующимъ образомъ (черт. 238).

Проводимъ черезъ точки данной кривой AK рядъ линій, параллель-

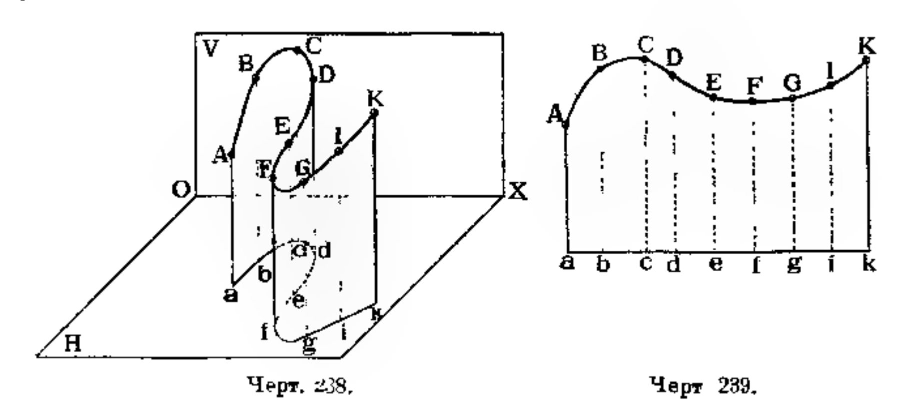
---

[1]) Другіе способы построенія проекцій круга см. O. Richter „Kreis und Kugel in senkrechter projektion" Leipzig. 1908.

ныхъ другъ другу и, напримѣръ, перпендикулярныхъ къ H. Совокупность этихъ линій образуетъ нѣкоторую цилиндрическую поверхность, которая пересѣчетъ H по линіи $ab \ldots ik$.

Разогнемъ или, какъ говорятъ, развернемъ эту поверхность въ плоскость, и пусть выпрямленный видъ ея, или ея развертка, изображенъ на черт. 239, и на развертку перенесены также точки данной кривой.

Тогда длина плоской кривой линіи $ABC \ldots K$, изображенной на разверткѣ, и будетъ равна истинной длинѣ данной кривой линіи двоякой кривизны.



Черт. 238. Черт 239.

Измѣрить же длину плоской кривой линіи съ точностью, достаточной для практики, можно, напримѣръ, разбивъ ее на участки AB, BC, CD и т. д., мало отличающіеся отъ прямыхъ линій, и выпрямивъ затѣмъ ломаную линію $ABCD \ldots K$ (см. стр. 152).

На черт. 240 изображено нѣсколько пространственныхъ кривыхъ. и показаны ихъ проекціи на плоскость H.

Кривая $ABCDE$ проектируется въ случайную кривую же линію $abcde$.

Проекціи изображенныхъ на черт. 240 кривыхъ имѣютъ, такъ называемыя, *особенныя точки.* Напримѣръ, кривая FGI, переходя изъ перваго угла пространства во второй, касается V въ точкѣ G и имѣетъ въ этой точкѣ себѣ касательную прямую GG_1.

Проекція fgi кривой, переходя съ передней полы H на заднюю полу, коснется оси OX въ точкѣ g, служащей проекціей точки G.

Точка g называется *точкой перегиба* кривой fgi.

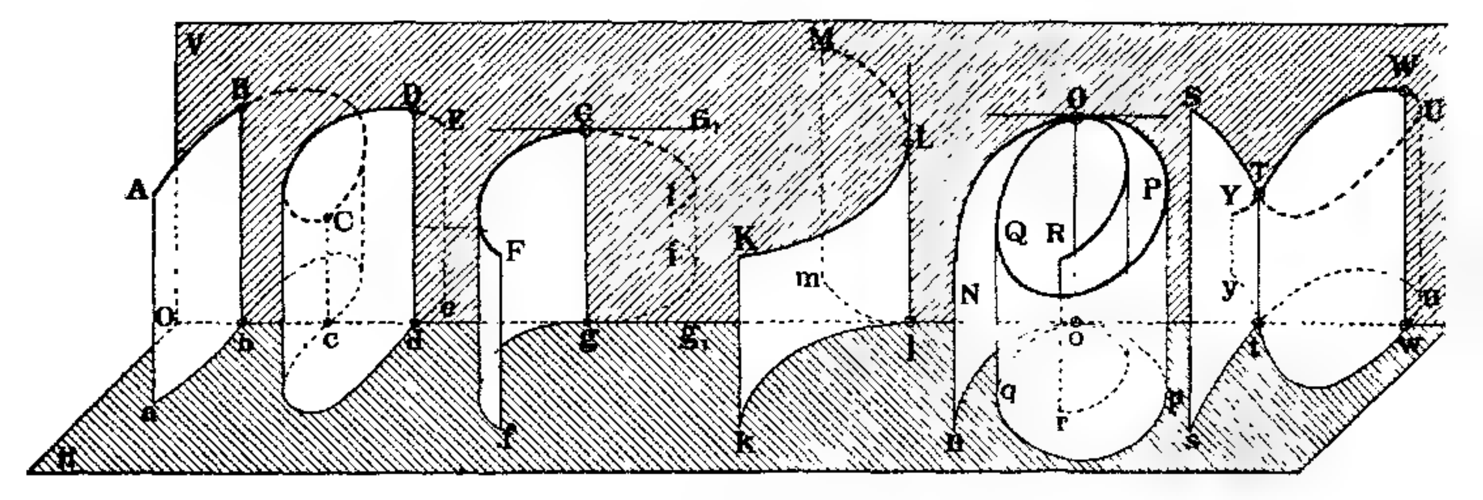
Третья, изображенная на чертежѣ 240, кривая KLM, переходя изъ перваго угла во второй, касается V въ точкѣ L, при чемъ касательная къ кривой въ этой точкѣ перпендикулярна къ H.

Проекція klm кривой касается оси OX въ точкѣ l, которая называется *точкой возврата* кривой klm.

Если кривая *NOPQOR*, дѣлая нѣсколько завитковъ въ пространствѣ, касается сама себѣ въ одной и той же точкѣ *O*, то и витки проекціи ея *nopqor* будутъ касаться другъ друга въ точкѣ *o*, проекціи точки *O*. Точка *o* называется *точкой повторенія* кривой *nopqor*.

Наконецъ, если кривая *STUWTY* въ пространствѣ пересѣкаетъ сама себя въ какой-нибудь точкѣ *T*, то и проекція *stuwty* этой кривой пересѣкаетъ сама себя въ точкѣ *t*, проекціи точки *T*.

Точка *t* называется *кратной точкой* кривой *stuwty*.



Черт. 240.

Такъ какъ одна параллельная проекція не опредѣляетъ проектируемой формы, то проекціи кривыхъ изображенныхъ на чертежѣ 240 могутъ соотвѣтствовать различнымъ кривымъ, начерченнымъ на проектирующихъ ихъ цилиндрахъ.

b) Проекціи цилиндрической винтовой линіи.

Среди различныхъ кривыхъ линій двоякой кривизны наибольшее примѣненіе въ техникѣ имѣютъ *цилиндрическія винтовыя линіи*, изображеніе и нѣкоторыя свойства которыхъ мы здѣсь въ видѣ примѣра и разсмотримъ.

Цилиндрической винтовой линіей называется такая линія, которая образована движеніемъ точки, вращающейся вокругъ прямой линіи *II* (черт. 241) и совершающей кромѣ того поступательныя движенія параллельно оси *II*, при чемъ поступательныя движенія параллельно оси пропорціональны угловымъ перемѣщеніямъ вокругъ оси. Линія *II* называется *осью винтовой линіи*.

Разстояніе точки до оси *II* называемая *радіусомъ винтовой линіи*.

Линія, образованная движеніемъ точки по такому закону, очевидно, можетъ быть начерчена на поверхности прямого кругового цилиндра

того же радіуса, что и винтовая линія, и съ той же осью II. Точка, образующая своимъ движеніемъ винтовую линію, сдѣлавъ полный оборотъ вокругъ оси цилиндра, придетъ опять на ту же производящую цилиндра, съ которой она начала свой путь.

Длина винтовой линіи между смежными точками ея, лежащими на одной и той же производящей цилиндра, называется *длиной одного оборота винтовой линіей*. Напримѣръ, на черт. 241 изображенъ одинъ оборотъ винтовой линіи и длина его будетъ **1, 2, 3 . . . 17.**

Разстояніе между точками **1** и **17**, лежащими на одной и той же производящей цилиндра, называется *шагомъ винтовой линіи*.

Разсмотримъ, какъ построить проекціи винтовой линіи по даннымъ: радіусу ея r, шагу h и оси II.

Пусть (черт. 242) ось II винтовой линіи перпендикулярна къ H и задана ея проекціями ii, $i'i'$.

Такъ какъ всѣ точки винтовой отстоятъ отъ оси II на одно и то же разстояніе r, то всѣ точки проекціи винтовой на H будутъ отстоять на одномъ и томъ же разстояніи отъ ii, т. е. винтовая линія спроектируется на H въ кругъ радіуса r съ центромъ въ ii.

Пусть начальное положеніе точки, образующей своимъ движеніемъ винтовую линію, будетъ 1 (11′), совпадающее съ H.

Раздѣлимъ кругъ на нѣкоторое число, напримѣръ, на 16 равныхъ частей и примемъ точки 2, 3, 4 . . . дѣленія за проекціи точекъ винтовой.

Если шагъ винтовой равенъ длинѣ h, то при переходѣ точки изъ положенія **1** во **2**, она поднимется надъ H на высоту $\frac{h}{16}$, при переходѣ изъ **1** въ **3** — на высоту $\frac{2h}{16}$ и т. д.

Поэтому возвышеніе вертикальной проекціи $2'$ точки **2** надъ OX будетъ равно $\frac{h}{16}$, возвышеніе точки $3'$ надъ осью будетъ равно $\frac{2h}{16}$ и т. д.

Построивъ такимъ образомъ вертикальныя проекціи $1'$, $2'$, $3'$... и т. д. точекъ винтовой, соединимъ ихъ плавной кривой, которая и будетъ служить вертикальной проекціей винтовой линіи.

Нетрудно показать, что эта проекція будетъ *синусоидой*.

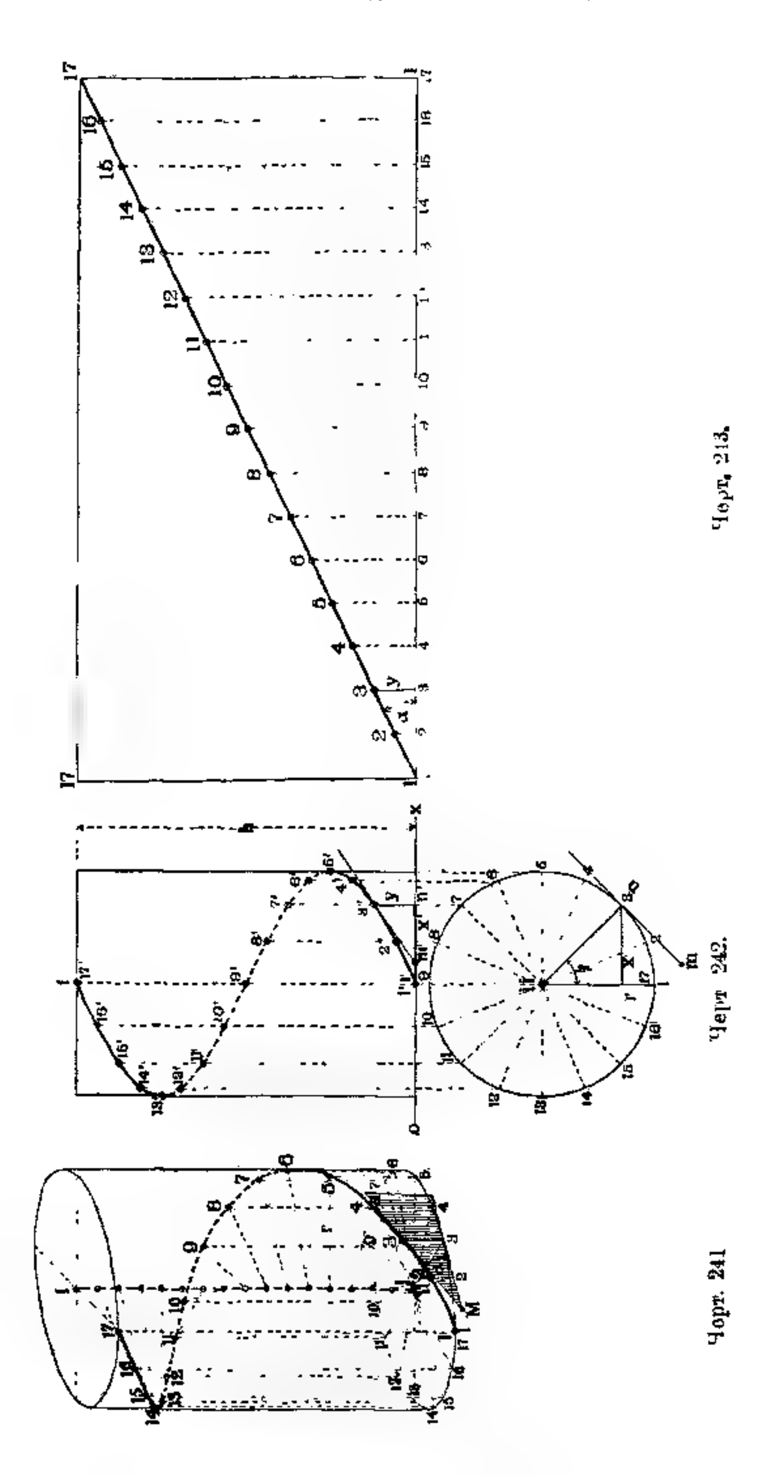
Примемъ за оси координатъ линіи OX и $i'i'$ и обозначимъ координаты какой-нибудь точки $3'$ черезъ x и y, а уголъ поворота точки 3 отъ начальнаго положенія 1 черезъ φ.

Тогда изъ чертежа имѣемъ:

$$x = r \sin\varphi; \quad \frac{h}{y} = \frac{2\pi}{\varphi},$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\pi}{h} \cdot y,$$



Черт. 241

Черт. 242.

Черт. 243.

и, наконецъ,

$$x = r \cdot \sin \frac{2\pi}{h} \cdot y \text{ — уравненіе синусоиды.}$$

Точка, образующая своимъ движеніемъ винтовую линію, можетъ вращаться вокругъ оси *II* по направленію движенія часовой стрѣлки или противъ, если смотрѣть по оси *II* въ направленіи удаленія точки. Перваго рода движеніе даетъ винтовую называемую *извивающейся вправо*, движеніе противоположное даетъ винтовую *извивающуюся влѣво*. Въ техникѣ примѣняютъ главнымъ образомъ винтовыя линіи извивающіяся вправо; такая линія и изображена на черт. 241 и 242.

Разрѣжемъ цилиндръ, на которомъ начерчена винтовая линія, по линіи **1,17** и развернемъ его поверхность въ плоскость (черт. 243). На разверткѣ эта поверхность изобразится въ видѣ прямоугольника, высота котораго равна шагу h винтовой, а основаніе равно длинѣ дуги круга-горизонтальной проекціи винтовой.

На основаніи закона образованія винтовой мы имѣемъ изъ черт. 242

$$\frac{y}{\varphi} = \frac{h}{2\pi},$$

или

$$\frac{y}{\text{дугѣ } 1{,}3} = \frac{h}{2\pi r}.$$

Но дуга 1,3 на чертежѣ 243 изображается въ видѣ отрѣзка 1,3 основанія прямоугольника развертки.

Если на этой разверткѣ изобразить и развертку винтовой линіи, то для любой точки этой развертки должно имѣть мѣсто равенство подобное только что написанному. А это показываетъ, что на разверткѣ винтовая линія изобразится въ видѣ прямой линіи (діагонали) **1,17** прямоугольника.

Длина этой діагонали будетъ равна истинной длинѣ одного оборота винтовой линіи, а уголъ наклона діагонали къ высотѣ прямоугольника, равенъ углу наклона винтовой къ производящимъ цилиндра

Изъ геометріи извѣстно, что уголъ между винтовой линіей и производящей цилиндра равенъ углу между касательной къ винтовой въ той же точкѣ и той же производящей.

Поэтому всѣ касательныя въ любыхъ точкахъ винтовой линіи будутъ одинаково наклонены къ производящимъ цилиндра, а, слѣдовательно, будутъ наклонены и къ *H* подъ однимъ и тѣмъ же угломъ α, равнымъ углу наклона діагонали прямоугольника (черт. 243) къ его основанію.

Разсмотримъ проекціи касательной къ винтовой въ какой-нибудь точкѣ **3** (черт. 242). Пусть точка *M* будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ этой касательной.

Въ пространствѣ линія $M3$ является гипотенузой прямоугольнаго треугольника $M3N$, однимъ катетомъ котораго служитъ отрѣзокъ $3'n'$, а другимъ — mn, который будетъ горизонтальной проекціей касательной и называется *подкасательной* $M3$.

Длина этой подкасательпой равна.

$$mn = y \cot g\, \alpha.$$

Изъ чертежа же 243 имѣемъ

$$1{,}3 = y \cot g\, \alpha,$$

и сравнивая съ тоько что полученнымъ выраженіемъ, получаемъ:

$$1{,}3 = mn;$$

отсюда вытекаетъ свѣдующая теорема.

Теорема 17. Длина подкасательной къ винтовой равна выпрямленной дугѣ круга горизонтальной проекціи винтовой отъ начальной точки до проекціи точки касанія.

Пользуясь этой теоремой, можно легко строить проекціи касательной въ любой точкѣ винтовой линіи.

Напримѣръ, чтобы построить касательную въ точкѣ **3** (черт. 242), проводимъ въ точкѣ **3** прямую, касательную къ кругу, и откладываемъ на ней отрѣзокъ $m3$ равный выпрямленной дугѣ $1{,}3$. Находимъ точку m' на оси OX и соединяемъ m' съ точкой $3'$. Прямая $m'3'$ будетъ вертикальной проекціей касательной.

На черт. 242 изображены проекціи винтовой линіи, когда ось ея перпендикулярна къ H.

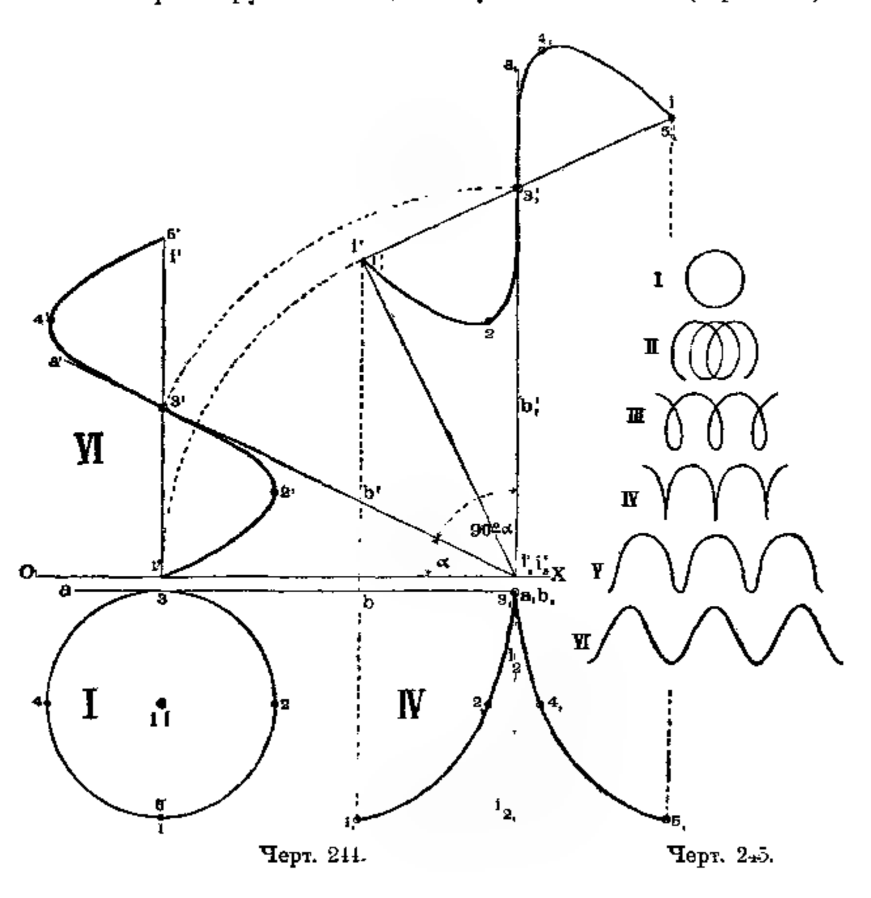
Если же эта ось будетъ занимать иныя положенія, то и проекціи винтовой будутъ имѣть иную форму.

На черт. 244 изображенъ одинъ изъ видовъ проекцій винтовой въ случаѣ, когда винтовая повернута вокругъ оси $I_2 I_2 \perp V$ на уголъ $90^\circ - \alpha$, гдѣ α—уголь наклона винтовой къ H, или, что то же — уголъ наклона къ H касательной къ винтовой въ точкѣ **3**.

Послѣ поворота винтовая на V спроектируется въ видѣ синусоиды той же формы, какъ и до поворота, а на H — въ видѣ кривой съ точкой возврата 3_1.

Если мы повернемъ винтовую вокругъ той же оси $I_2 I_2$, но на уголь меньшій $90^\circ - \alpha$, то проекція винтовой изобразится въ видѣ петлеобразныхъ кривыхъ подобныхъ кривымъ II или III по черт. 245. При углѣ поворота большемъ $90^\circ - \alpha$, горизонтальныя проекціи винтовой будутъ подобны кривой V (черт. 245).

Наконецъ, если уголъ поворота будетъ равенъ 90°, то винтовая на *V* и на *H* спроектируется въ видѣ синусоиды типа VI (черт. 245).



Черт. 244. Черт. 245.

§ 18. Виды наиболѣе примѣняемыхъ въ техникѣ кривыхъ поверхностей и способы заданія ихъ въ проекціяхъ.

а) Общія понятія.

Въ Начертательной Геометріи каждая кривая поверхность разсматривается, какъ совокупность послѣдовательныхъ положеній линіи, движущейся въ пространствѣ по опредѣленному закону [1]).

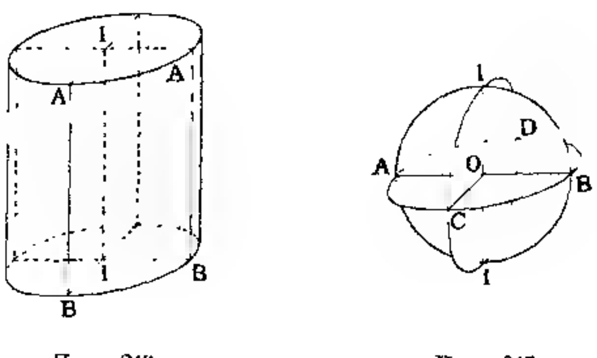
[1]) Въ этомъ отношеніи Начертательная Геометрія отличается отъ Аналитической Геометріи, въ которой кривая поверхность опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ должны удовлетворять нѣкоторому уравненію. Однако, изображать поверхность точками затруднительно, почему въ Начертательной Геометріи и принято изображать поверхность при помощи ея производящихъ.

Линія, образующая своимъ движеніемъ поверхность, называется *образующей или производящей* этой поверхности.

Всѣ кривыя поверхности можно раздѣлить на два класса, положивъ въ основу классификаціи видъ ихъ производящихъ:

1. *Поверхности съ прямыми производящими*, т. е. образованныя движеніемъ прямой линіи, какъ напримѣръ, цилиндрическая поверхность (черт. 246), образованная вращеніемъ прямой линіи AB вокругъ параллельной ей оси II.

2. *Поверхности съ кривыми производящими*, т. е. образованныя движеніемъ кривой линіи, какъ напримѣръ, шаровая поверхность, образованная вращеніемъ круга $CIDI$ (черт. 247) вокругъ своего діаметра II.



Черт. 246. Черт. 247.

Одна и та же поверхность можетъ быть образована движеніемъ различныхъ линій по разнымъ законамъ. Напримѣръ, цилиндръ, изображенный на черт. 246 можетъ быть образованъ движеніемъ круга BB, центръ котораго скользитъ вдоль оси II и плоскость котораго остается все время перпендикулярной къ II. Шаръ, изображенный на черт. 247, можетъ быть образованъ движеніемъ круга $ACBD$, центръ котораго скользитъ вдоль оси II, плоскость котораго остается перпендикулярной къ II, а радіусъ измѣняется по нѣкоторому закону и т. д.

Поверхности съ прямыми производящими называютъ также *линейчатыми*, т. е. образованными линіями, которыя можно проводить по прямой линейкѣ.

Если смежныя прямолинейныя производящія кривой поверхности параллельны другъ другу или пересѣкаются другъ съ другомъ, то такую кривую поверхность можно развернуть въ плоскость, вращая плоскіе элементы этой поверхности вокругъ послѣдовательныхъ производящихъ до совмѣщенія съ плоскостью одного изъ нихъ.

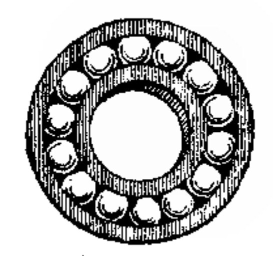
Поверхности, обладающія такимъ свойствомъ, называются *развертываемыми*.

Таблица кривыхъ поверхностей.

Поверхности линейчатыя.							Поверхности съ кривыми производящими.		
Развертываемыя.			Неразвертываемыя.				Постояннаго вида.		Перемѣннаго вида.
Цилиндрическія или цилиндры.	Коническія или конуса.	Поверхности съ ребромъ возврата.	Гиперболическіе параболоиды или косыя плоскости.	Цилиндроиды.	Коноиды.	Косые цилиндры о трехъ направляющихъ.	Поверхности вращенія.	Кривые цилиндры.	—
1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Развертываемые геликоиды.	1) Прямыя косыя плоскости.	1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Кривые цилиндры съ плоской направляющей.	1) Эллипсоиды.
2) Круговые.	2) Круговые.	2) Развертываемые кольцевые геликоиды.	2) Наклонныя косыя плоскости.	2) Винтовые.	2) Винтовые коноиды или неразвертываемые геликоиды.	2) Косые геликоиды.	2) Шары.	2) Геликоидальные цилиндры плоскаго горизонтальнаго сѣченія.	2) Однополые эллиптическіе гиперболоиды.
3) Эллиптическія.	3) Эллиптическіе.	3) Поверхности одинаковаго ската.	—	—	3) Кольцевые винтовые коноиды.	3) Косые кольцевые геликоиды.	3) Кольца.	3) Геликоидальные цилиндры плоскаго меридіональнаго сѣченія.	3) Графическія поверхности.
4) Параболическіе.	—	—	—	—	4) Прямые коноиды.	—	4) Торы.	4) Геликоидальные цилиндры круглаго нормальнаго сѣченія.	—
5) Овоидальные.	—	—	—	—	—	—	5) Двухъосные эллипсоиды.	—	—
—	—	—	—	—	—	—	6) Гиперболоиды вращенія.	—	—

Если же поверхность не заключаетъ въ себѣ прямолинейныхъ производящихъ, или, если ея смежныя прямолинейныя производящія не параллельны другъ другу и не пересѣкаются, то такія поверхности нельзя развернуть въ плоскость, и онѣ называются *неразвертываемыми или косыми.*

Въ таблицѣ, помѣщенной на стр. 170, перечислены тѣ изъ поверхностей, которыя въ дальнѣйшемъ нами будутъ разсмотрѣны [1]).



Черт. 248.

Кривую поверхность можно образовать не только движеніемъ линіи, но и движеніемъ какой-нибудь поверхности, которая въ этомъ случаѣ называется *образующей поверхностью.*

Образуемая такимъ образомъ поверхность будетъ обертывать различныя положенія образующей поверхности и называется по отношенію къ послѣдней *обертывающей поверхностью.* Напримѣръ, на черт. 248 изображенъ шариковый подшипникъ, состоящій изъ ряда стальныхъ шариковъ, заключенныхъ въ двухъ цилиндрическихъ обоймахъ, поверхности которыхъ и являются обертывающими шарики.

Черт. 249.

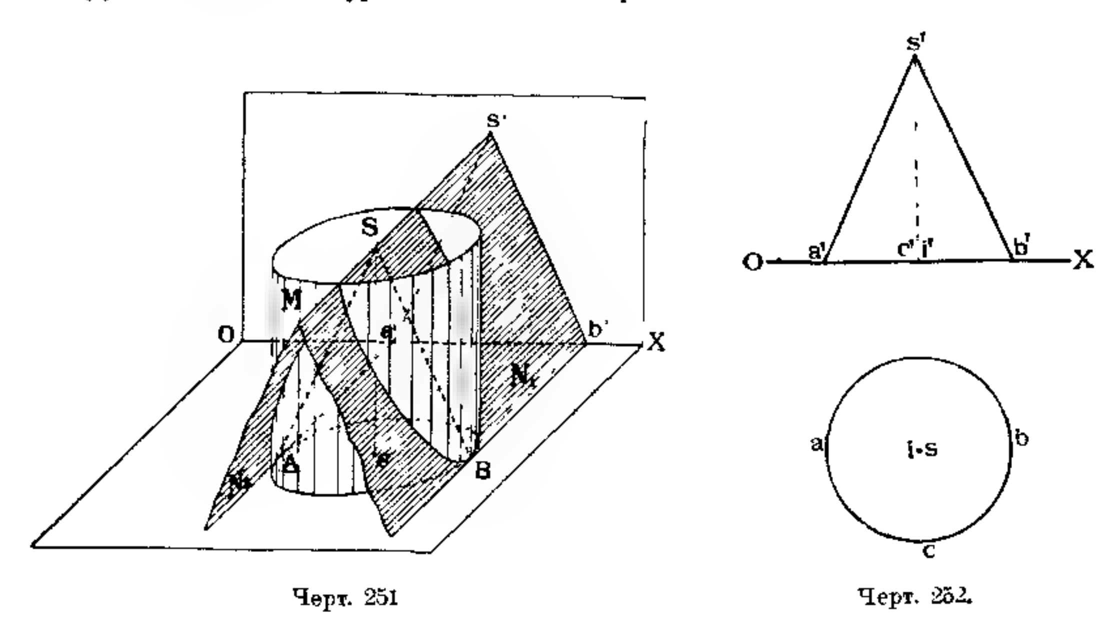
Черт. 250.

При изображеніи кривыхъ поверхностей въ ортогональныхъ проекціямъ мы будемъ часто пользоваться изображеніями контуровъ видимости поверхностей относительно каждой плоскости проекціи.

[1]) Классификація эта, съ нѣкоторыми нашими дополненіями, заимствована изъ соч. В. Курдюмова «Курсъ Начертательной Геометріи». Отдѣлъ I, часть II. СПБ. 1897 г.

Контуромъ видимости поверхности относительно H или V называется линія касанія поверхности съ обертывающимъ ее цилиндромъ, производящія котораго перпендикулярны къ H или къ V.

Напримѣръ, шаръ (черт. 249) въ проекціяхъ (черт. 250) изображается часто двумя кругами-проекціями круговъ $AGDF$ и $ABDE$ касанія шара съ цилиндрами M и N перпендикулярными къ H и къ V. Кругъ $AGDF$ является контуромъ видимости шара относительно H, а кругъ $ABDE$ контуромъ видимости шара относительно V.



Черт. 251 Черт. 252.

Въ частномъ случаѣ цилиндръ касанія можетъ превращаться въ плоскость, какъ напримѣръ, при построеніи контура видимости на V конуса стоящаго на H (черт. 251 и 252). Въ этомъ случаѣ цилиндръ, обертывающій конусъ и проектирующій его на V, превращается въ двѣ плоскости N_1 и N_2, касательныя къ конусу и перпендикулярныя къ V. Третьей плоскостью будетъ плоскость основанія конуса, т. е. H.

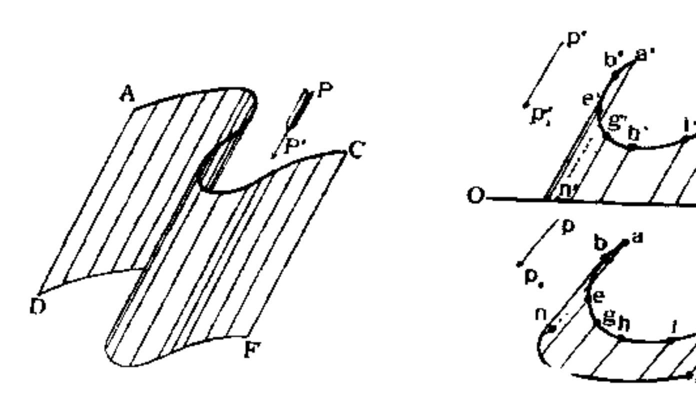
Контуромъ видимости конуса на V будетъ треугольникъ ASB (черт. 251), а на H—кругъ AB.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію различныхъ видовъ кривыхъ поверхностей, наиболѣе примѣняемыхъ въ техникѣ.

b) *Поверхности цилиндрическія или цилиндры.*

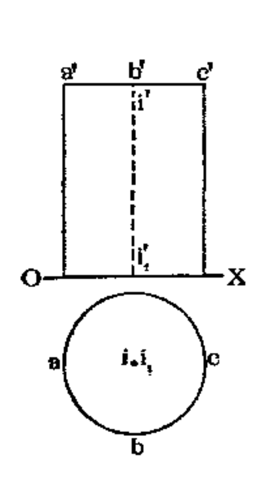
Такого рода поверхности образуются движеніемъ прямой линіи AB (черт. 253), во всѣхъ своихъ положеніяхъ остающейся параллельной нѣкоторому данному направленію PP_1, причемъ конецъ AB скользитъ по данной кривой линіи AC, называемой *направляющей цилиндра.*

На черт. 254 подобнаго рода цилиндрическая поверхность случайнаго вида изображена въ проекціяхъ, причемъ дана криволинейная ея направляющая AC и направленіе производящихъ PP_1. Чтобы построить производящую цилиндра, проходящую черезъ любую точку C

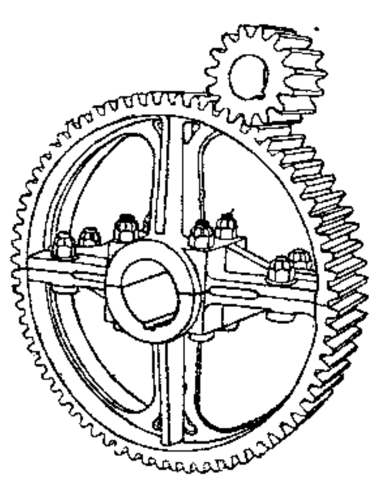


Черт. 253. Цилиндрическая поверхность. Черт. 254. Цилиндрическая поверхность.

направляющей, слѣдуетъ черезъ эту точку провести линію, параллельную направленію PP_1. На чертежѣ построенъ рядъ такихъ производя-



Черт. 255. Прямой круговой цилиндръ.

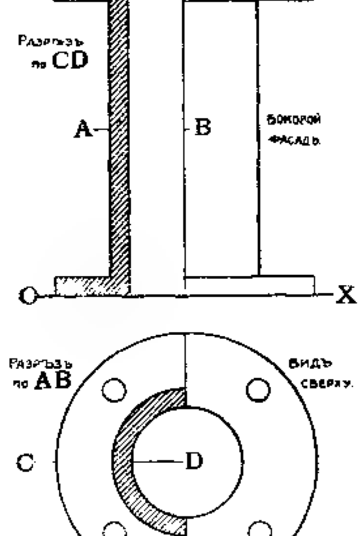


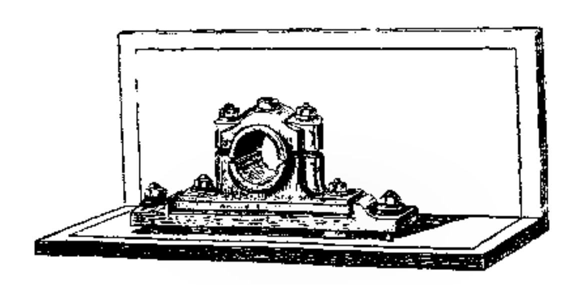
Черт. 256. Цилиндрическія зубчатыя колеса.

щихъ. Если мы найдемъ слѣды M, N и т. д. этихъ производящихъ на одной изъ плоскостей проекцій и соединимъ эти слѣды плавной кривой, то получимъ линію, называемую *слѣдомъ поверхности* на плоскости проекцій. На черт. 254 построенъ слѣдъ MN (mn, $m'n'$) цилиндра на плоскости H.

Если мы разсѣчемъ цилиндръ плоскостью нормальной къ направленію его производящихъ, то получимъ въ сѣченіи кривую линію, называемую *нормальнымъ сѣченіемъ* цилиндра. Въ зависимости отъ вида кривой нормальнаго сѣченія цилиндры раздѣляются на:

1) круговые,
2) эллиптическіе,
3) параболическіе,
4) овоидальные и др.

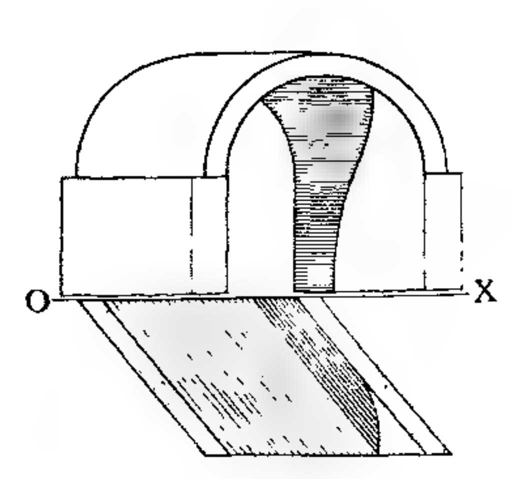




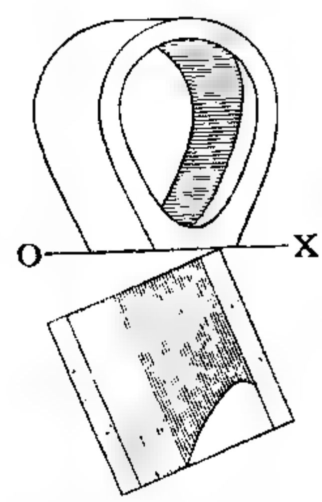
Черт. 257. Цилиндрическій подшипникъ.

Черт. 258. Цилиндрическая фланцевая труба.

На черт. 255 изображенъ въ проекціяхъ цилиндръ кругового нормальнаго сѣченія.



Черт. 259. Цилиндрическій сводъ.



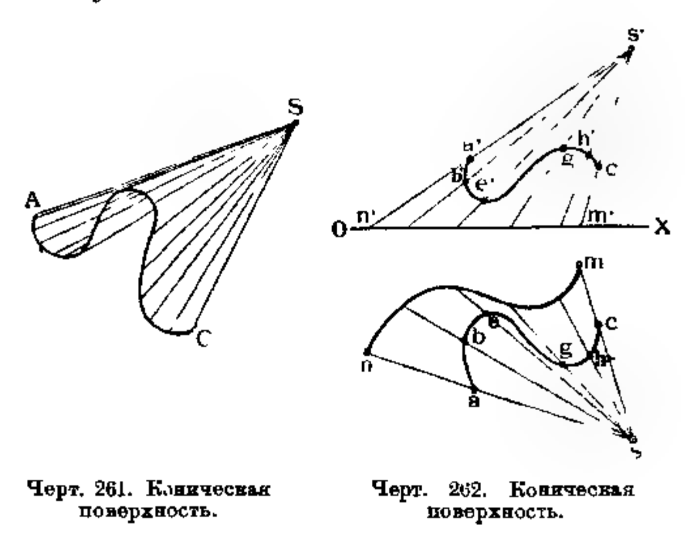
Черт. 260. Звено цилиндрической (овоидальной) водосточной трубы.

Цилиндрическія поверхности находятъ себѣ широкое примѣненіе въ практикѣ, напримѣръ, въ зубчатыхъ колесахъ (черт. 256), въ подшипни-

кахъ (черт. 257), въ флянцевыхъ трубахъ (черт. 258), въ сводахъ (черт. 259), въ водосточныхъ трубахъ (черт. 260) и т. д.

c) *Поверхности коническія или конуса.*

Коническія поверхности образуются движеніемъ прямой линіи AS (черт. 261), при всѣхъ своихъ положеніяхъ проходящей черезъ одну и ту же точку S, называемую *вершиною* конуса. Другой конецъ производящей AS скользитъ по нѣкоторой кривой линіи AC, называемой *направляющей конуса.*



Черт. 261. Коническая поверхность.

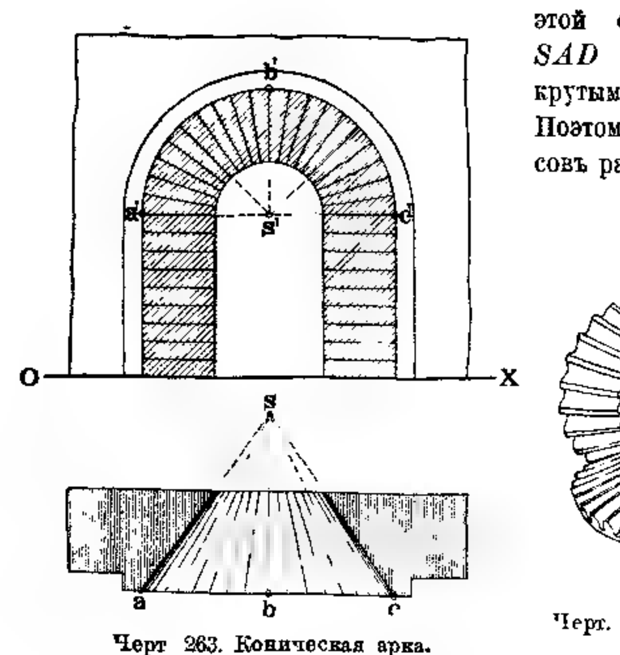
Черт. 262. Коническая поверхность.

На черт. 262 подобнаго рода коническая поверхность съ направляющей AC и вершиною S задана въ ортогональныхъ проекціяхъ. Зададимся рядомъ точекъ B, E, G, H на направляющей AC и соединимъ ихъ прямыми линіями AS, BS, ES и т. д. съ вершиною конуса. Эти линіи будутъ производящими конуса. Построимъ слѣды этихъ производящихъ, напримѣръ, на плоскости H и соединимъ ихъ плавной кривой MN. Линія MN называется *горизонтальнымъ слѣдомъ* конуса. Подобнымъ же образомъ можно построить и вертикальный слѣдъ конуса.

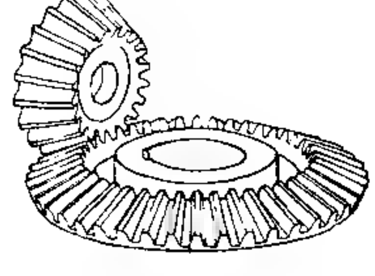
На черт. 252 изображенъ прямой круговой конусъ, стоящій на H. Ось SI этого конуса перпендикулярна къ направляющему кругу ABC и проходитъ черезъ его центръ. Если бы вмѣсто круга мы взяли эллипсъ, то получили бы эллиптическій конусъ. Коническіе поверхности часто примѣняются въ техникѣ, напримѣръ, для очертанія арокъ (черт. 263), зубчатыхъ колесъ (черт. 264) и т. д.

На черт. 265 показано примѣненіе эллиптическаго конуса SAC для

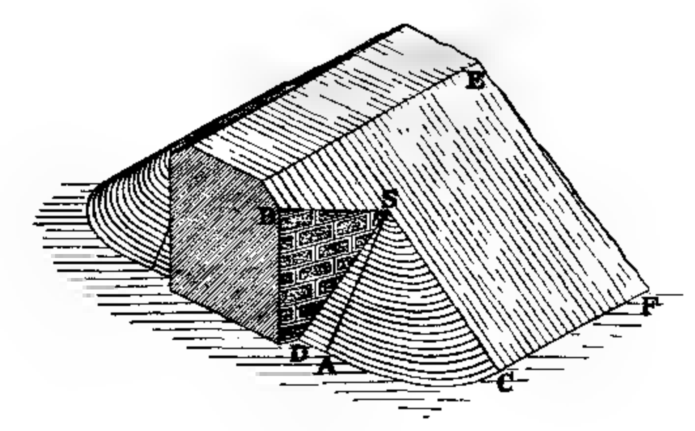
очертавія желѣзно-дорожной насыпи у стѣнки SBD каменнаго устоя. У этой стѣнки плоскій откосъ SAD насыпи сдѣланъ болѣе крутымъ, нежели откосъ $EFCS$. Поэтому, для сопряженія откосовъ разныхъ наклоновъ можно



Черт 263. Коническая арка.


Черт. 264. Коническія зубчатыя колеса.

примѣнить поверхность F эллиптическаго конуса SAC, касательнаго къ обоимъ откосамъ по линіямъ SA и SC.

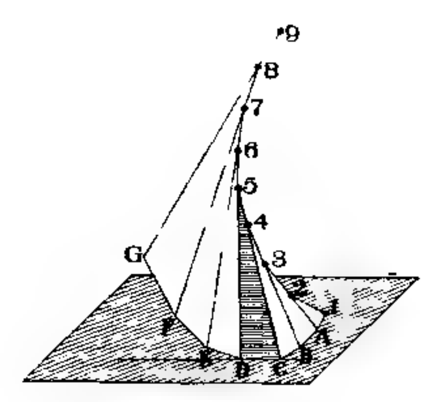


Черт. 265. Сопряженіе откосовъ земляного полотна при помощи эллиптическаго конуса.

б) ***Поверхности съ ребромъ возврата.***

Представимъ себѣ въ пространствѣ кривую линію двоякой кривизны 1, 2, 3 . . . 8, 9 (черт. 266). Намѣтимъ на этой кривой линіи рядъ точекъ 1, 2, 3 . . . 8, 9 и соединимъ эти точки послѣдовательно между собой

прямыми линіями. Тогда мы получимъ многоугольникъ, вписанный въ кривую линію. Продолжимъ стороны этого многоугольника; совокупность этихъ сторонъ образуетъ ребра нѣкотораго многогранника 123 ... 89GEE ... $A1$. Будемъ теперь увеличивать число сторонъ многоугольника, вписаннаго въ кривую линію, уменьшая длину ихъ. Тогда стороны многоугольника будутъ приближаться къ касательнымъ къ кривой въ точкахъ дѣленія, а ребра многогранника — къ производящимъ нѣкоторой кривой поверхности. Въ предѣлѣ, стороны многоугольника совпадутъ съ касательными къ кривой линіи, и многогранникъ превратится

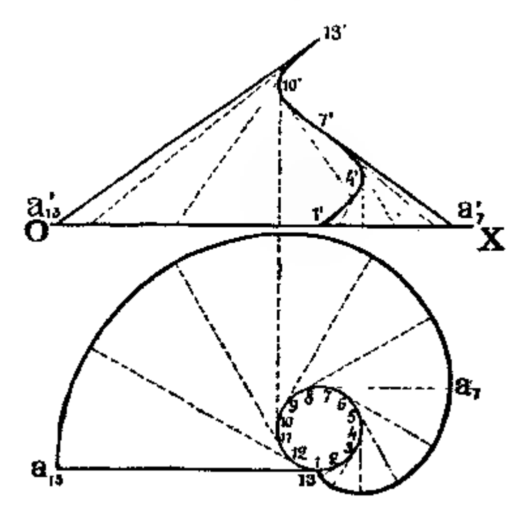


Черт 266 Поверхность съ ребромъ возврата.

въ кривую поверхность, образованную совокупностью касательныхъ къ кривой линіи въ разныхъ ея точкахъ. Иначе такую поверхность можно представить себѣ образованной перекатываніемъ прямой линіи по кривой, причемъ прямая постоянно остается касательной къ кривой линіи.

Такъ какъ каждую касательную можно продолжить по обѣ стороны отъ точки касанія, то можно образовать двѣ части или *полы* поверхности, лежащія съ разныхъ сторонъ кривой линіи, называемой *ребромъ возврата* по-


Черт. 267. Разверзаемый гелисоидъ.

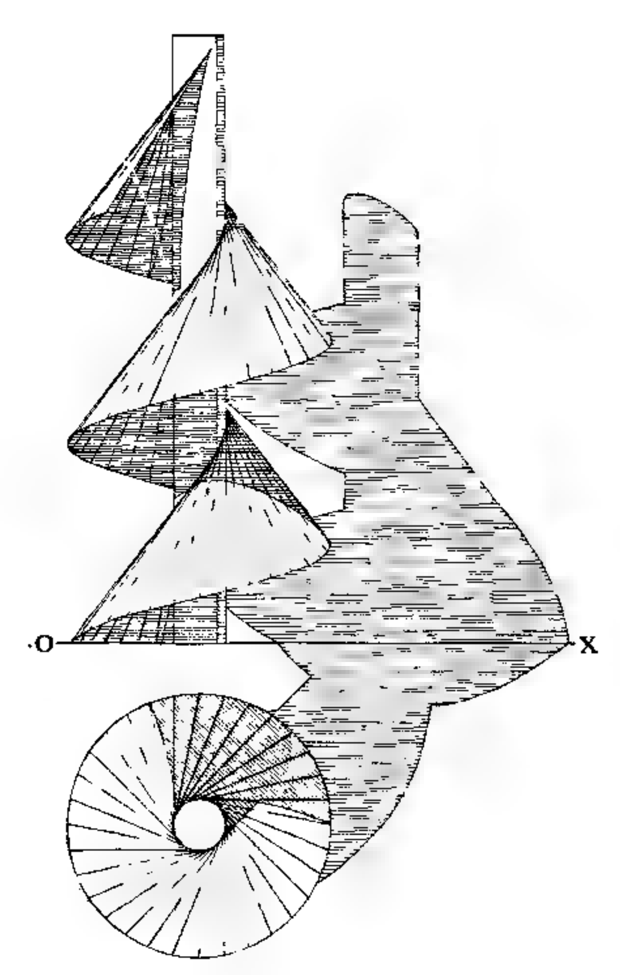


Черт. 268. Разверзаемый гелисоидъ.

верхности. Самая же поверхность, образованная такимъ образомъ, называется *поверхностью съ ребромъ возврата*, которая принадлежитъ къ поверхностямъ разверзаемымъ, такъ какъ каждая пара смежныхъ ея производящихъ пересѣкается между собой.

Въ зависимости отъ вида ребра возврата измѣняется и форма поверх-

ности. Если ребро возврата является винтовою цилиндрической линіей, то при перекатываніи по ней касательной образуется *«разверзаемый гелисоидъ»* (черт. 267). Для заданія его въ проекціяхъ достаточно показать проекціи винтовой линіи. Имѣя таковыя, нетрудно провести въ разныхъ точкахъ винтовой линіи касательныя къ ней, какъ было объ-

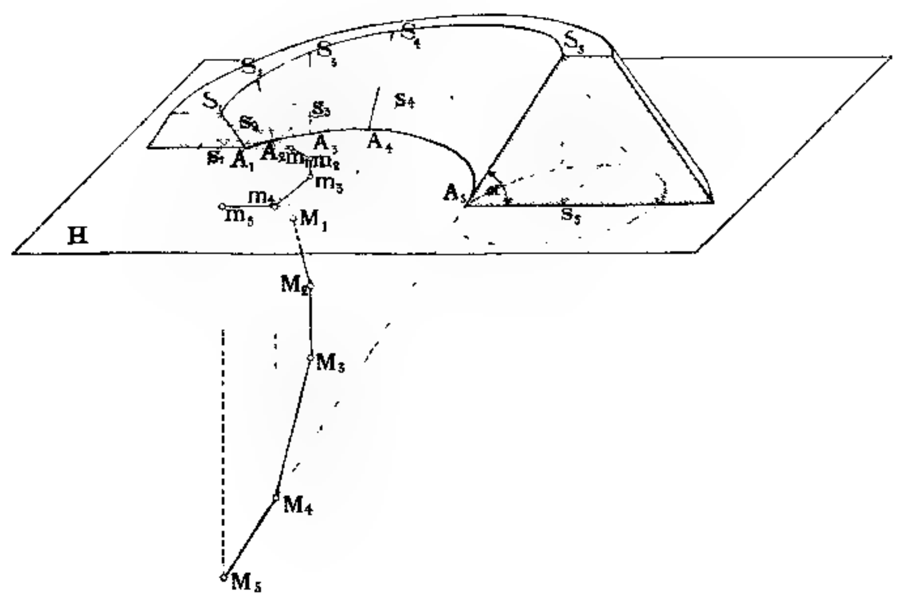


Черт. 269. Разверзаемый кольцевой гелисоидъ.

яснено на стр. 167. Совокупность этихъ касательныхъ и образуетъ разверзаемый гелисоидъ. На черт. 268 изображена въ проекціяхъ одна пола разверзаемаго гелисоида, соотвѣтствующаго одному обороту винтовой линіи, и построенъ слѣдъ $1A_7A_{13}$ его на плоскости H.

Представимъ себѣ круговой цилиндръ, одноосный съ винтовой линіей, ребромъ возврата гелисоида, но діаметра большаго, нежели вин-

товая линія. Нетрудно показать, что такой цилиндръ разсѣчетъ гелисоидъ по цилиндрической винтовой линіи того же шага, что и ребро возврата. Доказательство слѣдуетъ изъ того, что отрѣзки производящихъ гелисоида между ребромъ возврата и цилиндромъ всѣ одинаковой длины, всѣ одинаково наклонены къ H, всѣ касательны къ ребру возврата, и одинъ конецъ ихъ скользитъ по ребру возврата; слѣдовательно и другой конецъ будетъ также описывать винтовую цилиндрическую линію того же шага, что и ребро возврата. Гелисоидъ, ограниченный ребромъ возврата и упомянутой линіей сѣченія называется *развертываемымъ кольцевымъ гелисоидомъ* (черт. 269).

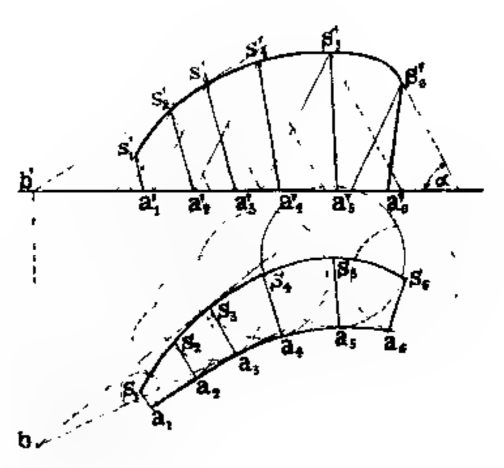


Черт 270. Поверхность одинаковаго ската въ примѣненіи къ очертанію откосовъ желѣзнодорожной насыпи на кривой и на уклонѣ.

Другимъ примѣромъ поверхности съ ребромъ возврата можетъ служить *поверхность одинаковаго ската*, примѣняемая для очертанія откосовъ желѣзнодорожной насыпи на уклонѣ и на кривой (черт. 270). Всѣ производящія M_1S_1, M_2S_2 . . . M_5S_5 одинаково наклонены подъ нѣкоторымъ угломъ α къ данной плоскости H и касательны къ нѣкоторой линіи M_1M_5—ребру возврата этой поверхности.

Если кривая S_1S_5 является бровкой насыпи, то ту же поверхность откоса ея можно представить себѣ образованной еще и слѣдующимъ образомъ. Пусть въ пространствѣ движется прямой круговой конусъ, ось котораго остается все время вертикальной, производящія наклонены подъ угломъ α къ горизонту, а вершина S скользитъ по линіи S_1S_5.

Тогда кривая поверхность, обертывающая различныя положенія этого конуса, и будетъ поверхностью одинаковаго ската, которая, касаясь различныхъ конусовъ по ихъ производящимъ, будетъ имѣть свои производящія наклоненными подъ однимъ и тѣмъ же угломъ α къ плоскости H. Часть поверхности одинаковаго ската между двумя смежными производящими можно, съ извѣстнымъ приближеніемъ, разсматривать какъ коническую поверхность. Напримѣръ, поверхность $A_4A_5S_5S_4$ можно считать образованную движеніемъ линіи M_4S_4, проходящей черезъ точку M_4, и во всѣхъ своихъ положеніяхъ остающейся одинаково наклоненной къ H. При такихъ условіяхъ образуется поверхность прямого кругового конуса съ осью M_4m_4, перпендикулярной къ H.



Черт. 271. Поверхность одинаковаго ската.

Сѣченіе этого конуса съ H дастъ дугу круга A_4A_5 съ центромъ въ точкѣ m_4. Продолжая разсужденія подобнымъ же образомъ, мы, съ извѣстнымъ приближеніемъ, можемъ горизонтальный слѣдъ $A_1—A_4$ поверхности одинаковаго ската принять составленнымъ изъ взаимно касательныхъ дугъ круговъ A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_5 съ центрами въ точкахъ m_1, m_2, m_3 и m_4.

На черт. 271 поверхность одинаковаго ската изображена въ проекціяхъ. Задана направляющая линія S_1S_6, и данъ уголъ a наклона производящихъ конуса къ B.

Для построенія горизонтальнаго слѣда и производящихъ поверхности поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Задаемся рядомъ положеній движущагося конуса и строимъ круги—слѣды ихъ на H.

Проводимъ по лекалу линію $a_1—a_6$, обертку этихъ слѣдовъ, которая и будетъ служить горизонтальнымъ слѣдомъ поверхности одинаковаго ската.

Для построенія любой производящей этой поверхности проводимъ изъ какой нибудь точки s_3, горизонтальной проекціи одной изъ вершинъ движущагося конуса, нормаль къ кривой a_1a_6, т. е. радіусъ s_3a_3 круга съ центромъ въ s_3, проведенный въ точку a_3 касанія этого круга съ оберткой. Находимъ точки s_3' и a_3' на V. Линія S_3A_3 и будетъ искомой производящей. Ту же производящую можно было бы найти еще и слѣдующимъ образомъ. Проводимъ черезъ точку S_3 касательную S_3B къ кривой S_1S_5 и находимъ горизонтальный слѣдъ B ея.

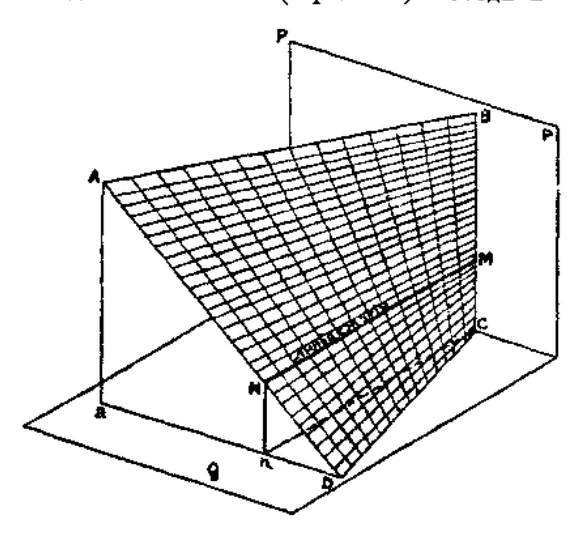
Проводимъ черезъ точку B линію, касательную къ кругу основанія конуса S_3.

Точка касанія A_3 съ точкой S_3 и опредѣлить искомую производящую S_3A_3. Доказательство слѣдуетъ изъ того, что плоскость S_3BA_3 будетъ общей касательной какъ къ конусу, такъ и къ поверхности одинаковаго ската.

На чертежѣ 271 построенъ рядъ производящихъ S_1A_1, S_2A_2 и т. д. поверхности.

e) *Гиперболическіе параболоиды или косыя плоскости.*

Представимъ себѣ въ пространствѣ двѣ прямыя линіи AB и CD, не лежащія въ одной плоскости (черт. 272). Соединимъ концы этихъ



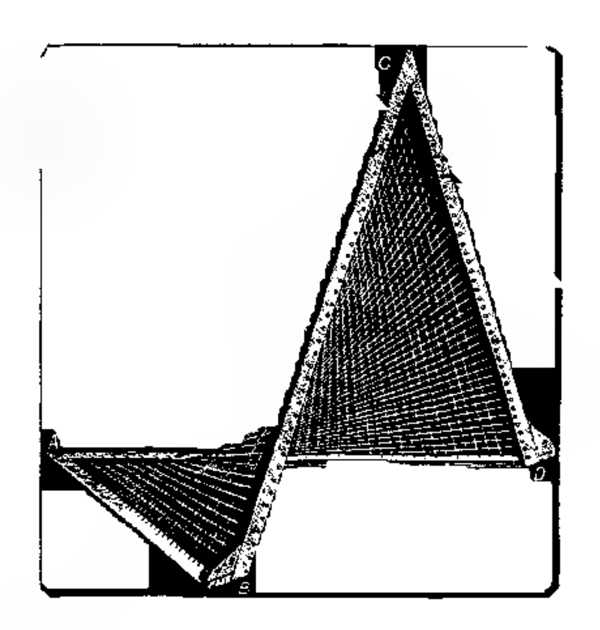
Черт. 272. Гиперболическій параболоидъ или косая плоскость.

линій прямыми AD и BC, которыя также не будутъ лежать въ одной плоскости. Проведемъ черезъ линію CD плоскость Q параллельную AB. Разсѣчемъ теперь линіи AB и CD рядомъ плоскостей, параллельныхъ Q, и соединимъ полученныя точки пересѣченія прямыми линіями, которыя, очевидно, будутъ параллельны плоскости Q. Далѣе, проведемъ черезъ BC плоскость P, параллельную AD, разсѣчемъ линіи AB и BC плоскостями, параллельными P, и соединимъ полученныя точки пересѣченія прямыми линіями, которыя, очевидно, будутъ параллельны P.

Всѣ упомянутыя линіи образуютъ кривую поверхность, называемую *гиперболическимъ параболоидомъ или косою плоскостью*. Линіи AB, CD, AD, BC и другія вышеупомянутыя—называются *производящими* этой поверхности. Плоскости P и Q, параллельно которымъ располагаются производящія, называются *плоскостями параллелизма* косой плоскости.

Косую плоскость можно представить также образованную движеніемъ производящей прямой линіи CD, постоянно пересѣкающей двѣ не лежащія въ одной плоскости прямыя AD и BC и постоянно остающейся параллельной плоскости Q. Въ этомъ случаѣ линіи AB и BC называются *направляющими* косой плоскости.

Ту же косую плоскость можно образовать и движеніемъ производящей прямой линіи BC, постоянно пересѣкающей двѣ, не лежащія въ одной плоскости, прямыя AB и DC и постоянно остающейся параллельной плоскости P. Въ этомъ случаѣ линіи AB и CD называются направляющими косой плоскости.



Черт. 273 Гиперболическій параболоидъ или косая плоскость

Часто линіи AB и CD называютъ производящими одного направленія, а линіи AD и BC—производящими другого направленія

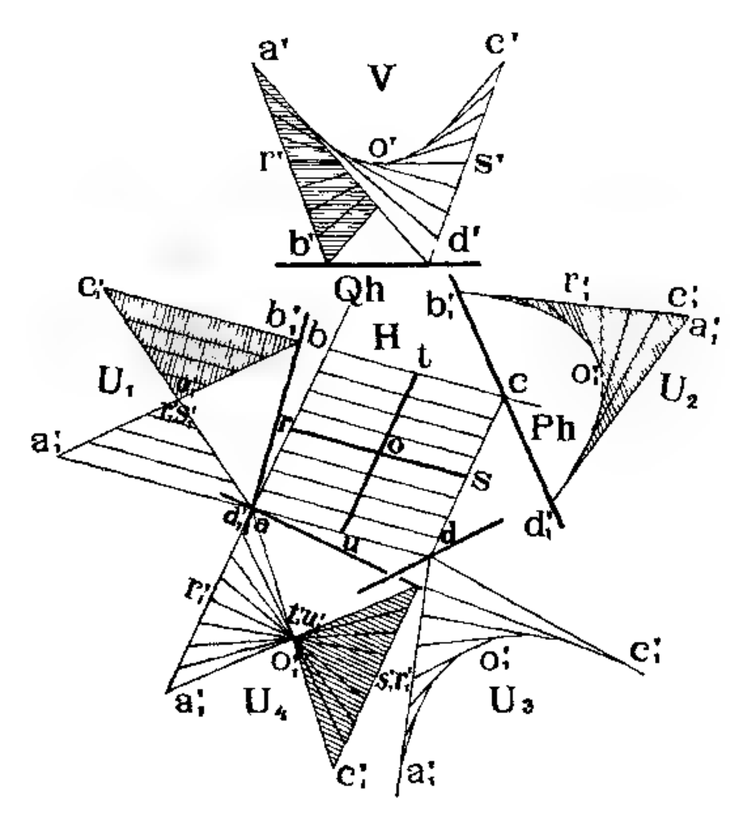
Если плоскости параллелизма P и Q взаимно перпендикулярны, какъ это и показано на чертежѣ 272, то косая плоскость называется *прямою*. Въ противномъ случаѣ она называется *наклонною*.

На каждой парѣ смежныхъ производящихъ всегда можно отыскать двѣ ближайшія другъ къ другу точки (см. стр. 78).

Линія, соединяющая всѣ подобныя точки на кривой поверхности, называется *линіей сжатія* поверхности, и такъ какъ на поверхности имѣется двѣ системы производящихъ, то, слѣдовательно, на ней будетъ и двѣ линіи сжатія.

На черт. 272 изображены таковыя линіи сжатія MN и BC для прямой косой плоскости. Въ этомъ случаѣ линіи сжатія превращаются въ прямыя линіи, перпендикулярныя къ плоскостямъ параллелизма.

На черт. 273 изображенъ общій видъ гиперболическаго параболоида или косой плоскости.

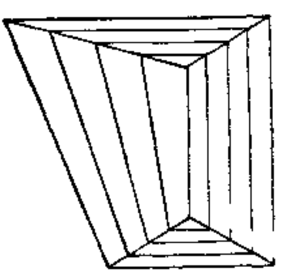


Черт. 274. Гиперболическій параболоидъ или косая плоскость

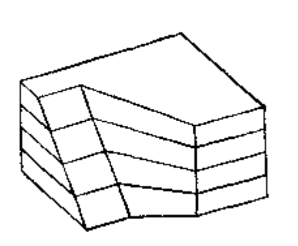
На черт. 274 косая плоскость изображена въ проекціяхъ въ разныхъ видахъ. Задана она направляющими AB и CD, параллельными плоскости Q, и производящими AD и BC, параллельными плоскости P. Плоскости P и Q выбраны перпендикулярными къ B.

Такъ какъ P не перпендикулярна къ Q, то слѣдовательно задана наклонная косая плоскость. Для того, чтобы построить случайную производящую, напримѣръ, параллельную P и проходящую черезъ точку S линіи CD, проводимъ черезъ S плоскость параллельную P, и находимъ точку R пересѣченія этой плоскости съ AB. Линія SB и будетъ искомой.

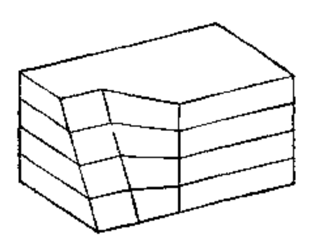
На черт. 272 изображены проекціи косой плоскости на слѣдующихъ плоскостяхъ проекцій



Черт 275. Примѣненіе косой плоскости къ образованію крыши



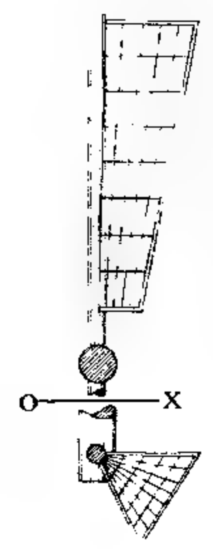
Черт. 276.



Черт. 277.

Примѣненіе косой плоскости къ образованію набережныхъ

1) V, 2) H, 3) $U_1 \perp H$ и $\perp P$, 4) $U_2 \perp H$ и $\parallel BD$, 5) $U_3 \perp H$ и $\parallel AC$, 6) $U_4 \perp H$ и $\perp Q$.



Черт. 278. Примѣненіе косой плоскости къ образованію поверхности крыла вѣтряной мельницы.

Косая плоскость довольно часто примѣняется на практикѣ.

На черт. 275 показано примѣненіе ея къ образованію двухъ боковыхъ скатовъ крыши, перекрывающей зданіе, имѣющее въ планѣ видъ трапеціи, причемъ конекъ крыши горизонтальный.

На черт. 276 и 277 показано два примѣра примѣненія косой плоскости для ограниченія боковой стѣнки набережной при переходѣ отъ наклонной ея грани къ вертикальной.

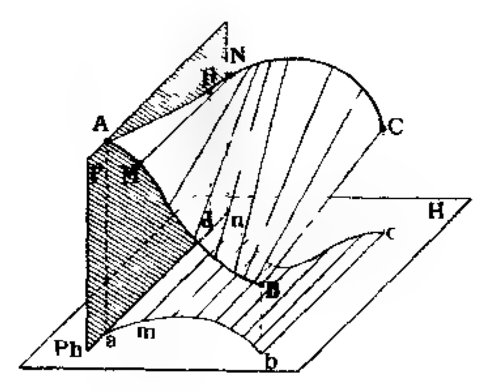
На черт. 278 показано примѣненіе косой плоскости къ образованію поверхности лопасти колеса вѣтряной мельницы.

f) *Цилиндроиды.*

Цилиндроидомъ называется поверхность, образованная движеніемъ производящей прямой линіи AD (черт. 279), концы которой скользятъ по двумъ не лежащимъ въ одной плоскости кривымъ направляющимъ AB и CD, и которая постоянно остается параллельной нѣкоторой плоскости P, называемой плоскостью параллелизма цилиндроида.

Для изображенія цилиндроида въ проекціяхъ (черт. 280) необходимо задаться проекціями его направляющихъ AB и CD и плоскостью параллелизма P, или же вмѣсто P положеніемъ двухъ производящихъ, напримѣръ AD и DC, такъ какъ тогда легко опредѣлить плоскость P, параллельную AD и BC.

Для построенія случайной производящей цилиндроида поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Если плоскость параллелизма цилиндроида задана случайно, то сначала, при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій, переходимъ къ такой системѣ, въ которой плоскость P заняла бы положеніе, перпендикулярное къ одной изъ плоскостей проекцій.

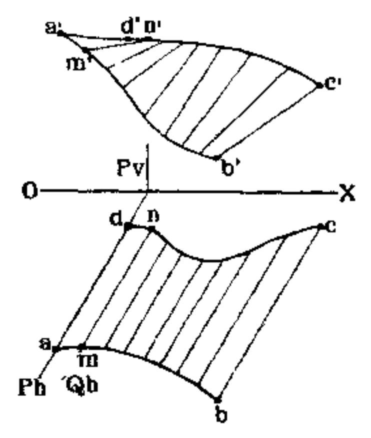


Черт. 279. Цилиндроидъ

На черт. 279 показанъ случай, когда $P \perp H$.

При этомъ горизонтальныя проекціи производящихъ спроектируются на H въ видѣ прямыхъ, параллельныхъ Ph, что облегчаетъ ихъ построеніе Для построенія случайной производящей цилиндроида, проходящей напримѣръ, черезъ точку M его направляющей, проводимъ черезъ M плоскость $Q \parallel P$ ($Qh \parallel Ph$) и находимъ точку N пересѣченія кривой BC съ Q. Линія MN и будетъ искомой производящей.

Цилиндроидъ можно также образовать движеніемъ прямой линіи параллельно плоскости параллелизма, причемъ прямая можетъ: 1) или касаться двухъ какихъ нибудь кривыхъ поверхностей, 2) или касаться одной кривой поверхности и пересѣкать одну кривую линію.



Черт. 280. Цилиндроидъ.

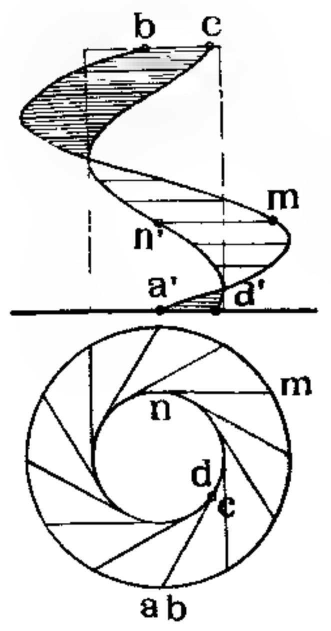
На черт. 281 показаны проекціи одного изъ частныхъ видовъ цилиндроида, именно, *винтовой цилиндроидъ*.

Поверхность эта образована движеніемъ прямой линіи, пересѣкающей винтовую линію AB и касательной къ одноосному съ AB круговому цилиндру. Плоскость параллелизма перпендикулярна къ оси цилиндра. Для построенія случайной производящей, проходящей черезъ точку M направляющей AB, проводимъ черезъ m касательную mn къ кругу, проекціи на H цилиндра, а черезъ m'—прямую $m'n'$ параллельную OX. При такихъ условіяхъ прямая MN будетъ производящей цилиндра.

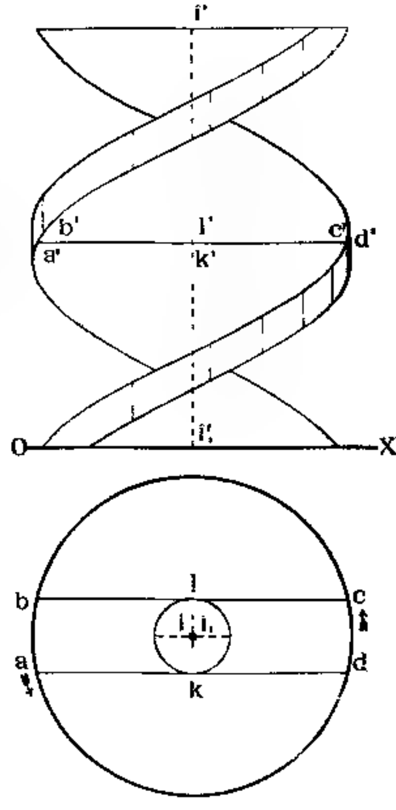
Геометрическое мѣсто точекъ N касанія производящихъ съ цилинд-

ромъ образуетъ цилиндрическую винтовую линію CND, одноосную съ данной винтовой линіей AB и того же шага.

На черт. 282 показанъ въ проекціяхъ примѣръ комбинаніи двухъ поверхностей винтового цилиндроида, образующихъ витой стержень. Направляющій круговой цилиндръ съ осью II перпендикуляренъ къ H, которая служитъ плоскостью параллелизма. Производящими служатъ двѣ прямыя линіи AD и DC, параллельныя H и касательныя къ цилиндру съ двухъ сторонъ его въ точкахъ K и L, причемъ $AK = KD = CL = LD$. Черезъ точки A и B, D и C проведены дуги круговъ AB и CD съ центромъ на оси II. Концы A, D, C и D производящихъ скользятъ по четыремъ винтовымъ линіямъ, одноосньмъ съ цилиндромъ. При движеніи упомянутыхъ производящихъ образуются два винтовыхъ цилиндроида, изъ которыхъ каждый ограниченъ винтовой линіей касанія на направляющемъ цилиндрѣ, напримѣръ, проходящей черезъ точку K и двумя наружными винтовыми линіями, напримѣръ, проходящими черезъ точки A и D. Всѣ эти винтовыя линіи будутъ одинаковаго шага. Дуги круговъ AB и DC опишутъ части двухъ круговыхъ цилиндрическихъ поверхностей съ осью II.



Черт. 281. Винтовой цилиндроидъ.



Черт 282. Сочетаніе двухъ винтовыхъ цилиндроидовъ.

На чертежѣ 283 показана одна вертикальная проекція образованнаго тѣла съ тѣнями.

Цилиндроиды примѣняются иногда для очертанія сводовъ.

На черт. 284 показана въ планѣ лѣстничная домовая клѣтка квадратнаго сѣченія съ центральнымъ каменнымъ столбомъ также квадратнаго сѣченія. Вокругъ этого столба идетъ витая лѣстница, ступеньки которой должны поддерживаться сводами, опирающимися на столбъ и на стѣны

клѣтки. Сводчатыя поверхности образованы цилиндроидами. Одна изъ такихъ поверхностей для части *abcd* изображена на чертежѣ. Плоскостью параллелизма служитъ плоскость стѣны BC. Направляющими служатъ

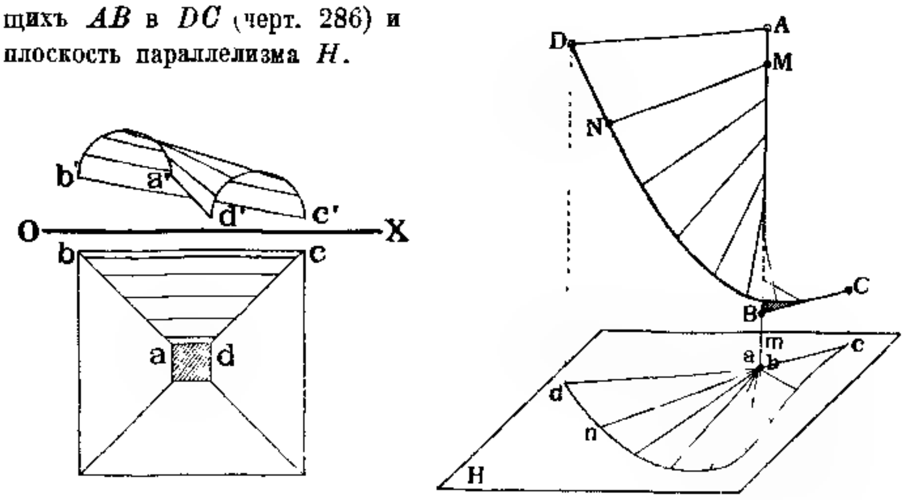


Черт. 283. Витой стержень, ограниченный поверхностями двухъ винтовыхъ цилиндроидовъ и обыкновенной цилиндрической.

эллипсы AB и DC, діаметры AB и DC которыхъ горизонтальны, и которые образованы такъ, что проектируются на стѣны клѣтки въ видѣ круговъ. Крайними производящими являются прямыя AD и BC, соединяющія концы діаметровъ эллипсовъ.

g) *Коноиды.*

Коноидомъ называется поверхность (черт. 285), образованная движеніемъ производящей прямой линіи AD параллельно нѣкоторой плоскости H, называемой плоскостью параллелизма; при этомъ производящая пересѣкаетъ двѣ направляющихъ линіи: кривую DC и прямую AB. Для заданія коноида въ проекціяхъ достаточно задать проекціи его направляющихъ AB и DC (черт. 286) и плоскость параллелизма H.



Черт. 284. Примѣненіе цилиндроида къ образованію свода.

Черт 285. Коноидъ

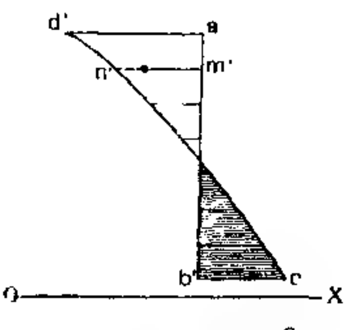
Чтобы построить проекціи какой нибудь производящей, напримѣръ, приходящей черезъ точку M, достаточно провести черезъ послѣднюю плоскость, параллельную H, и найти точку N пересѣченія кривой DC съ этой плоскостью. Прямая NM и будетъ искомой производящей. Наиболѣе удобнымъ для проведенія производящихъ является такое положеніе коноида, когда плоскость параллелизма его перпендикулярна къ одной изъ плоскостей проекцій, такъ какъ тогда проекціи на эту плоскость производящихъ будутъ параллельны слѣду плоскости параллелизма на той же плоскости проекцій, что облегчаетъ построеніе производящихъ.

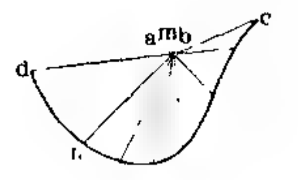
Коноидъ можетъ быть образованъ также движеніемъ прямой, пересѣкающей направляющую прямую линію и касательной нѣкоторой поверхности, причемъ, конечно, прямая должна двигаться параллельно данной плоскости параллелизма.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ заданія коноида.

***Винтовой** коноидъ или неразвертываемый гелисоидъ* (черт. 287), образуется движеніемъ прямой, пересѣкающей цилиндрическую винтовую линію DC и ея ось AB. Плоскость параллелизма расположена перпенди-

кулярно къ оси AB. Для построенія проекцій случайной производящей коноида, проходящей черезъ точку M, проводимъ черезъ m' прямую $m'n' \parallel OX$ до пересѣченія съ $d'c'$ въ точкѣ n'; проектируемъ n' на dc въ точку n. Прямая $m'n'$ и mn и будетъ искомой производящей.



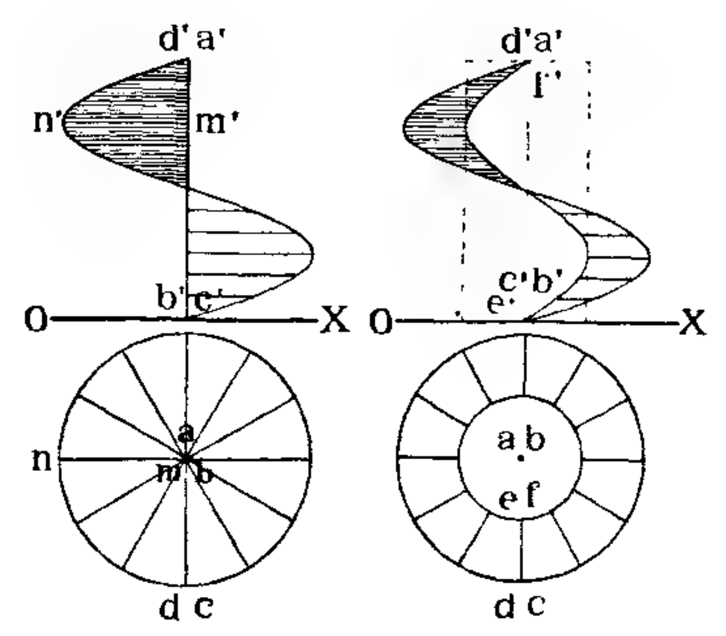


Черт. 286. Коноидъ.

Разсѣчемъ винтовой коноидъ круговымъ цилиндромъ, осью котораго служила бы линія AB (черт. 288) Этотъ цилиндръ пересѣчетъ коноидъ по цилиндрической винтовой линіи EF, того же шага, что и DC и съ той же осью AB.

Поверхность между винтовыми линіями DC и EF называется *кольцевымъ винтовымъ коноидомъ* и весьма часто примѣняется въ техникѣ.

На черт. 289 показано примѣненіе этой поверхности къ очертанію простѣйшаго прибора для подъема воды и называемаго *Архимедовымъ винтомъ*.

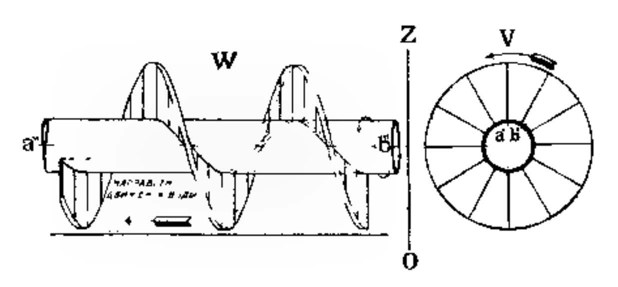


Черт. 287. Винтовой коноидъ или неразвертываемый геликоидъ.

Черт. 288. Кольцевой винтовой коноидъ.

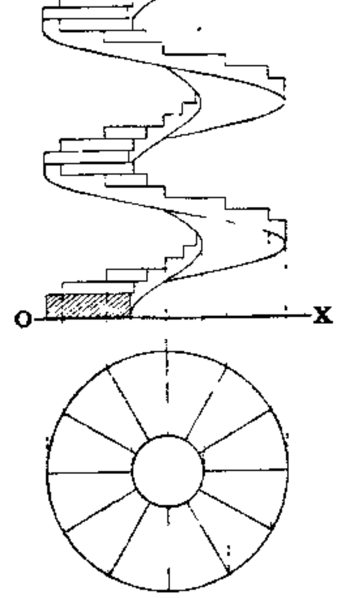
Вокругъ оси AB вращается площадка ограниченная двумя прямыми

линіями $\perp AB$, продолженіе которыхъ пересѣкаетъ AB, и двумя дугами круговъ. Плоскость параллелизма перпендикулярна къ AB.



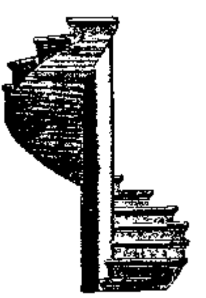
Черт. 289 Архимедовъ винтъ (кольцевой винтовой коноидъ).

На черт. 290 показано примѣненіе винтового кольцеваго коноида къ образованію винтовой лѣстницы, а на черт. 291 изображенъ общій видъ такой лѣстницы.



Черт. 290. Винтовая лѣстница (кольцевой винтовой коноидъ).

На черт. 292 показано примѣненіе той же поверхности къ очертанію цилиндрической пружины. Вокругъ оси AB пружины вращается прямоугольникъ $CDEF$, плоскость котораго все время проходитъ черезъ AB и вершины котораго скользятъ по винтовымъ линіямъ одинаковаго шага, осью которыхъ служитъ AB.



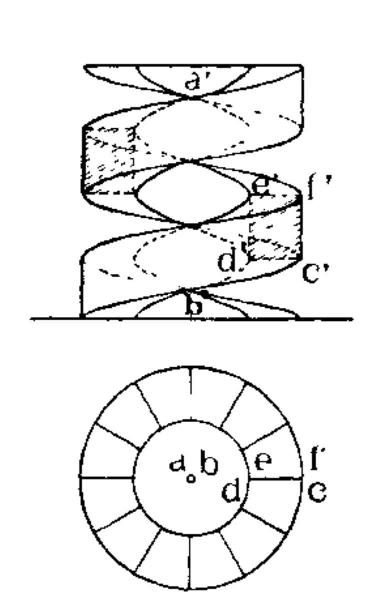
Черт. 291 Винтовая лѣстница, кольцевой винтовой коноидъ.

На черт. 293 и 294 показаны еще примѣненія той же поверхности къ очертанію винтовой прямоугольной нарѣзки винтовъ, а на черт. 295—къ очертанію внутренней нарѣзки муфты, навинчиваемой на такіе винты.

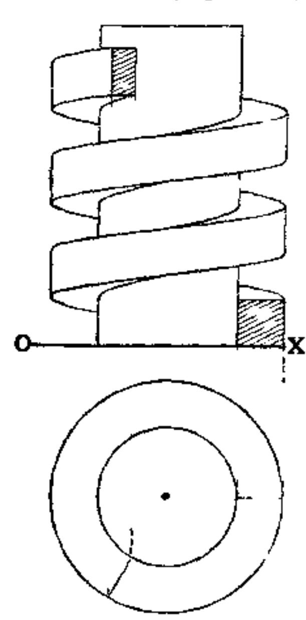
Если вокругъ оси AB будетъ вращаться не одинъ прямоугольникъ, какъ то показано на черт. 293, а нѣсколько, то получается винтъ съ нѣсколькими витками, напримѣръ, съ четырьмя, какъ изображено на черт. 296.

Если коноидъ образованъ движеніемъ прямой по двумъ направляющимъ: прямой AB (черт. 297) и дугѣ круга DFC, причемъ и AB и плоскость DFC перпендикулярны къ плоскости параллелизма H, то такой

коноидъ называется *прямымъ*. Эта поверхность примѣняется къ очертанію арокъ для оконъ и дверей въ прямыхъ стѣнахъ зданій (черт. 297).

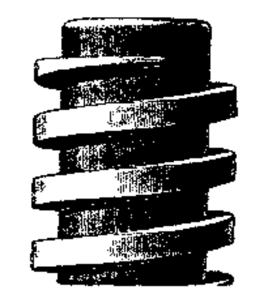


Черт 292. Цилиндрическая пружина (кольценые винтовые коноиды и круговые цилиндры).



Черт. 293. Винтъ съ прямоугольной нарѣзкой (Примѣне кольценого винтового коноида).

Иногда коноидъ примѣняется и для очертанія сводиковъ въ проемахъ, сдѣланныхъ въ цилиндрическихъ башняхъ (черт. 298). Направляющими служатъ: ось AB башни и какая нибудь кривая, начерченная на наружной поверхности башни, напримѣръ, DEC. Плоскость параллелизма перпендикулярна къ оси башни.



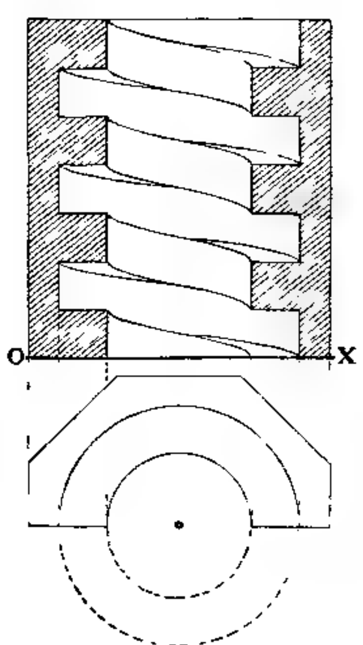
Черт 294. Винтъ съ прямоугольной нарѣзкой (Примѣненіе кольцевого винтового коноида).

h) *Косые цилиндры о трехъ направляющихъ.*

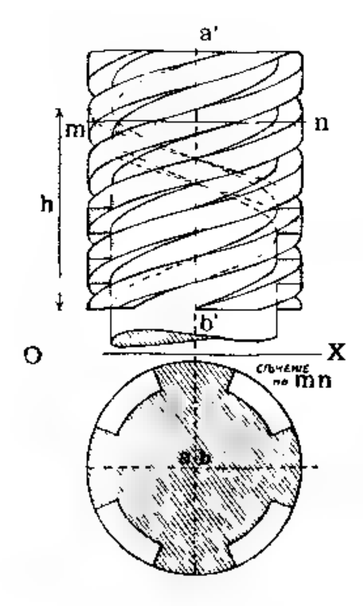
Косымъ цилиндромъ о трехъ направляющихъ называется поверхность, образованная движеніемъ прямой линіи MQ (черт. 299), которая должна пересѣкать три не лежащія въ одной плоскости направляющія AB, CD и FF, изъ которыхъ хотя бы одна должна быть кривой линіей.

На чертежѣ 299 показанъ пріемъ опредѣленія случайнаго положенія такой производящей. Выбираемъ какую-нибудь точку M на направляющей AB и соединяемъ ее съ различными точками направляющей EF

прямыми линіями, совокупность которыхъ, въ общемъ случаѣ заданія, образуетъ нѣкоторую коническую поверхность.

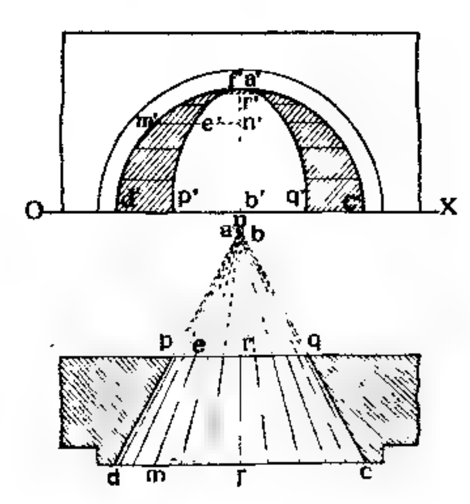


Черт. 295. Муфта съ прямоугольной нарѣзкой. (Примѣненіе кольцевого винтового коноида).

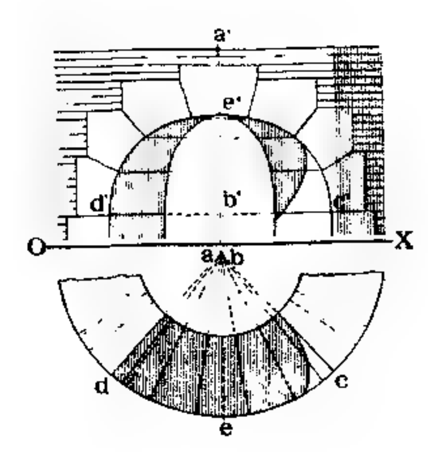


Черт. 296. Винтъ съ четырьмя прямоугольными витками (Примѣненіе кольцевыхъ винтовыхъ коноидовъ).

Находимъ точку N встрѣчи третьей направляющей CD съ этой по-



Черт. 297. Прямой коноидъ въ примѣненіи къ образованію арки.



Черт. 298. Прямой коноидъ въ примѣненіи къ образованію арки.

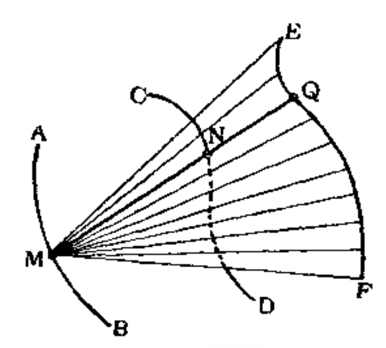
верхностью и соединяемъ точки N и M. Прямая MN и будетъ искомой

производящей косого цилиндра, такъ какъ она пересѣкаетъ направляющія въ точкахъ M, N и Q.

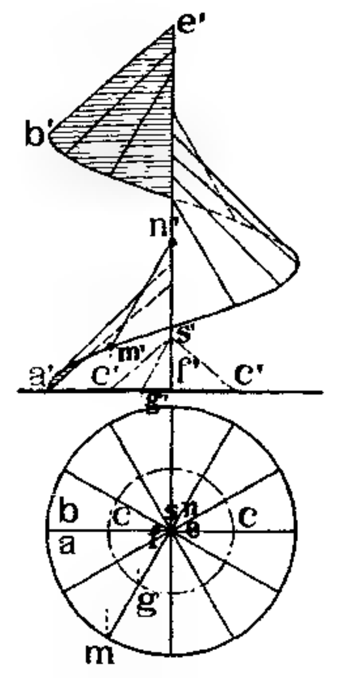
Вмѣсто линіи, направляющей можетъ служить какая-нибудь кривая поверхность, которой должна касаться производящая при всѣхъ своихъ положеніяхъ.

Наконецъ, вмѣсто линіи, направляющей можетъ служить кривая поверхность, параллельно послѣдовательнымъ производящимъ которой должна двигаться производящая косого цилиндра, пересѣкая двѣ другихъ направляющихъ линіи.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ заданія косого цилиндра о трехъ направляющихъ.



Черт. 299 Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ



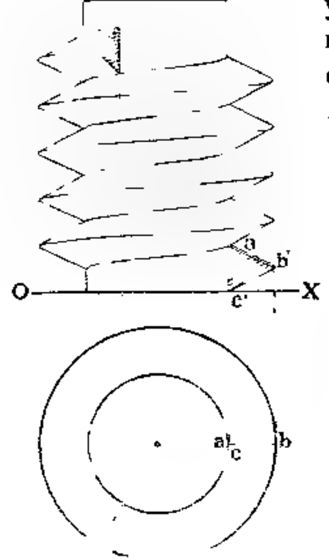
Черт 300 Косой гелисоидъ.

Косой гелисоидъ образуется движеніемъ прямой линіи, пересѣкающей цилиндрическую винтовую линію AB (черт. 300), ея ось EF и параллельную при своемъ движеніи послѣдовательнымъ производящимъ прямого кругового конуса SCC, одноосного съ винтовой линіей. Чтобы построить какую-нибудь производящую гелисоида, проходящую черезъ точку M на направляющей AB, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: соединяемъ m съ точкой n, служащей горизонтальной проекціей EF. Линія mn должна служить горизонтальной проекціей искомой производящей. Находимъ на направляющемъ конусѣ производящую, горизонтальная проекція которой была бы параллельна mn.

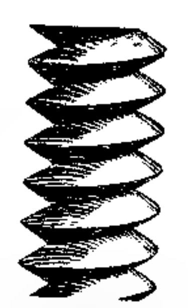
Таковой производящей является линія GS. Проводимъ теперь черезъ m' прямую $m'n'$, параллельную $g's'$, до пересѣченія съ $e'f'$ въ точкѣ n'. Прямая MN и будетъ искомой производящей косого гелисоида, такъ какъ она пересѣкаетъ направляющія въ точкахъ M и N и параллельна производящей GS конуса.

Произведя рядъ подобныхъ построеній, можно построить рядъ производящихъ гелисоида.

Косой гелисоидъ часто примѣняется для очертанія винтовъ съ треугольной нарѣзкой. На черт. 301 показанъ примѣръ формы такого винта, нарѣзка котораго образована движеніемъ треугольника ABC, вращающагося вокругъ оси винта, при чемъ плоскость треугольника постоянно проходитъ черезъ ось винта, сторона AC остается всегда вертикальной, а вершина B скользитъ по винтовой линіи. При такихъ условіяхъ стороны AB и BC опишутъ двѣ поверхности, являющіяся косыми гелисоидами.



Черт. 301 Примѣненіе косого гелисоида къ образованію винта съ треугольной нарѣзкой.


Черт 302 Примѣненіе косого гелисоида къ образованію винта съ треугольной нарѣзкой

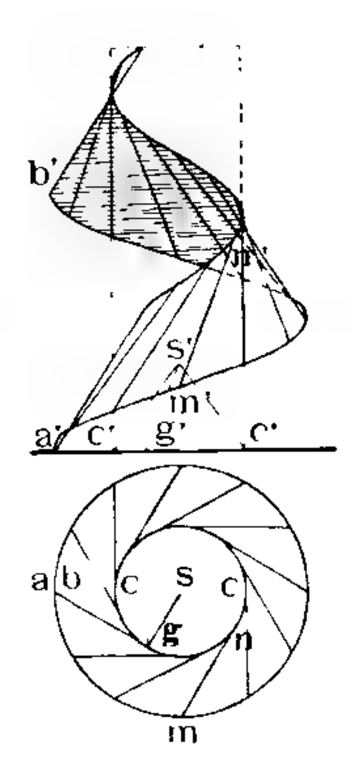
На черт. 302 изображенъ общій видъ такого винта.

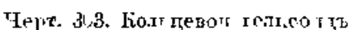
Косой кольцевой гелисоидъ образуется движеніемъ производящей прямой, одинъ конецъ которой скользитъ по цилиндрической винтовой линіи, далѣе, эта производящая во всѣхъ своихъ положеніяхъ касается прямого кругового цилиндра, одноосяаго съ винтовой линіей, и параллельна послѣдовательнымъ производящимъ прямого кругового конуса, одноосяаго съ цилиндромъ и винтовой линіей.

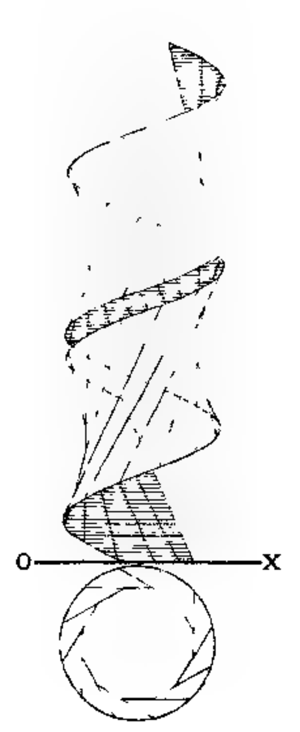
На черт. 303 показано изображеніе такой поверхности въ проекціяхъ. Даны: направляющая винтовая линія AB, и одноосные съ ней цилиндръ и конусъ.

Для того чтобы построить случайную производящую гелисоида, проходящую, напримѣръ, черезъ точку M винтовой линіи, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: проводимъ черезъ m прямую, касательную въ точкѣ n къ кругу cc, проекціи направляющаго цилиндра, и принимаемъ mn за горизонтальную проекцію искомой производящей Находимъ на конусѣ производящую GS, которая имѣла бы горизонтальную проекцію gs, параллельную mn. Далѣе, проводимъ черезъ m' прямую $m'n' \parallel g's'$. Линія MN и будетъ искомой производящей гелисоида, такъ какъ она пересѣкаетъ винтовую AB, касательна къ направляющему цилиндру и параллельна производящей gs направляющаго конуса.

Такъ какъ изъ точки m можно провести двѣ касательныя къ кругу основанія цилиндра и для этихъ двухъ касательныхъ можно найти на поверхности конуса четыре соотвѣтствующихъ производящихъ, то, поэтому, при таковомъ заданіи можно построить четыре гелисоида.




Черт. 303. Кольцевой гелисоидъ



Черт. 304. Косой кольцевой гелисоидъ.

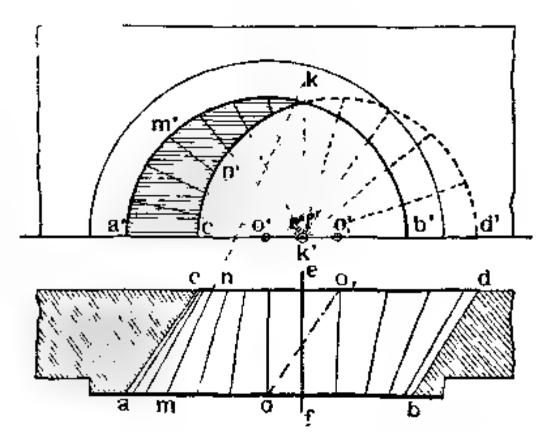
На черт. 304 показанъ еще примѣръ косого гелисоида, образованнаго движеніемъ производящей прямой линіи, концы которой скользятъ по двумъ одноосным цилиндрическимъ винтовымъ линіямъ одинаковаго шага и радіуса, причемъ производящая все время касается прямого кругового цилиндра, одноосного съ винтовыми линіями.

Косой цилиндръ для образованія сводовъ надъ косыми проходами.

Такого рода гелисоидъ образуется движеніемъ прямой линіи, пересѣкающей двѣ вертикальныя, параллельныя и равныя другъ другу дуги полукруговъ AB и CD и прямую EF, перпендикулярную къ плоскостямъ круговъ (черт. 305).

Построимъ какую-нибудь производящую поверхности, напримѣръ, про-

ходящую черезъ точку M полукруга AB. Для этого проведемъ черезъ M и прямую EF плоскость и найдемъ точку N пересѣченія этой плоскости съ полукругомъ CB. Вертикальная проекція n' точка Nбудетъ лежать на пересѣченіи $c'd'$ съ $m'e'$.



Черт. 305. Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ, примѣняемый для образованія сводовъ надъ косыми проходами.

Соединяя M съ N прямой, получимъ искомую производящую MN, которая пересѣчетъ прямую EF въ точкѣ K (k, k'). На чертежѣ 306 изображенъ общій видъ этой поверхности [1])



Черт. 306. Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ, примѣняемый для образованія сводовъ надъ косыми проходами.

Другой случай примѣненія подобной же поверхности показанъ на черт. 307, на которомъ изображенъ такъ называемый Марсельскій сводъ. Поверхность его образована движеніемъ прямой по тремъ направляющимъ: дугѣ круга AB съ центромъ въ O_1, дугѣ круга CD съ центромъ въ O и прямой EF. Плоскости обѣихъ дугъ параллельны другъ другу. Часть свода ограничена двумя поверхностями, образованными движеніемъ прямой, пересѣкающей тѣ же двѣ направляющія CD и EF и прямыя AG или BI. Любая производящая MN строится такъ, какъ это было описано для свода по чертежу 305.

---

[1]) Примѣненіе такой поверхности къ очертанію сводовъ, перекрывающихъ косые проходы, т. е. такіе, ось которыхъ не лежитъ въ плоскости перпендикулярной къ фасаднымъ стѣнамъ, было предложено Гашеттомъ (Hachette). Поверхность такихъ сводовъ называется «biais passé, corne de vache, warped arch» Подробности о свойствахъ этой поверхности см.:

1) F. Wilson «Descriptive Geometry». New-Iork. 1898, pg. 127.

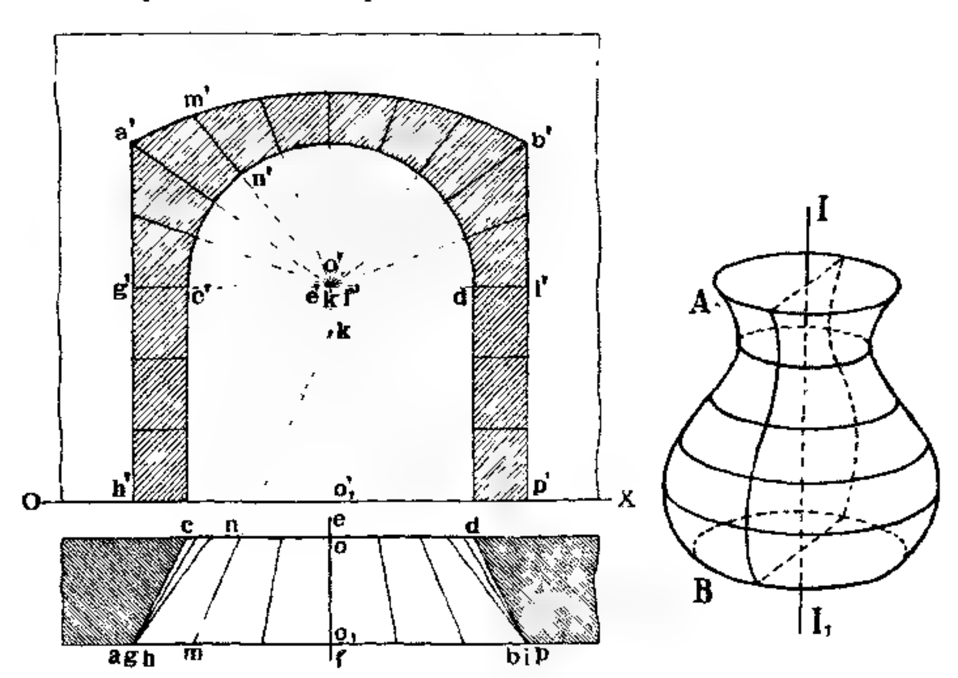
2) F. J. «Exércices de Géométrie Descriptive» Paris, 1893, pg. 425.

3) Adhémar «Coupe des pierres».

4) C. Wiener «Lehrbuch der Darstellenden Geometrie». Bd. II. St. 475.

i) *Поверхности вращенія.*

Поверхности вращенія образуются при вращеніи какой-нибудь криволинейной или прямолинейной производящей вокругъ нѣкоторой оси или при вращеніи кривой поверхности вокругъ нѣкоторой оси. Въ послѣднемъ случаѣ поверхность вращенія является оберткой всѣхъ положеній производящей поверхности.



Черт. 307 Марсельскій сводъ. (Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ).

Черт. 308. Поверхность вращенія.

На черт. 308 показана кувшинообразная поверхность, образованная вращеніемъ производящей AB вокругъ оси II_1.

Для заданія такой поверхности въ проекціяхъ достаточно показать проекціи оси вращенія II_1 и направляющей AB (черт. 309).

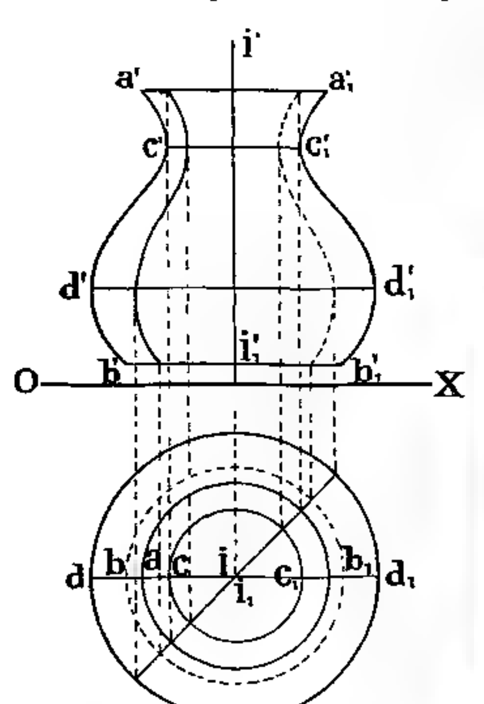
Для наглядности изображенія поверхности вращенія изображаютъ часто проекціями контуровъ ихъ видимости на V и H. Въ данномъ случаѣ контуромъ видимости фигуры на V будутъ двѣ симметричныя относительно ii_1 линіи $a'b'$ и $a_1'b_1'$ и двѣ линіи $a'a_1'$ и $b'b_1'$ параллельныя оси OX.

Контуромъ видимости на H будетъ кругъ dd_1. Иногда, для наглядности, изображаютъ еще проекціи круга наименьшаго діаметра CC_1, *горла* поверхности, и круговъ основаній AA_1 и BB_1.

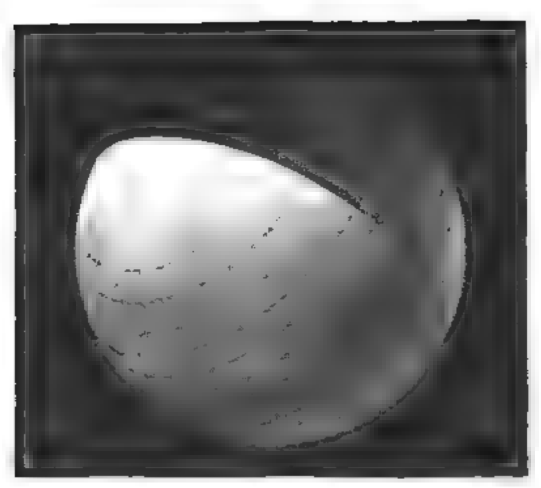
Проекціи любого положенія производящей легко построить, пользуясь методомъ вращенія, т. е. поворачивая рядъ точекъ данной производящей вокругъ оси II_1 на извѣстный уголъ и соединяя между собой новыя проекціи точекъ.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ поверхностей вращенія.

Шаръ образуется вращеніемъ круга $ABDE$ вокругъ его діаметра II_1 (черт. 250). Контуромъ видимости шара на V и H служатъ круги того же діаметра, какъ и данный кругъ (черт. 249 и 250).



Черт. 309. Поверхность вращенія.



Черт. 310. Шаръ.

На черт. 310 показано изображеніе шара съ тѣнями.

Въ техникѣ часто примѣняются поверхности, образованныя вращеніемъ дуги BC круга съ касательной къ ней прямой AB, вокругъ діаметра II_1 этой дуги, параллельной упомянутой прямой AB (чертежъ 311).

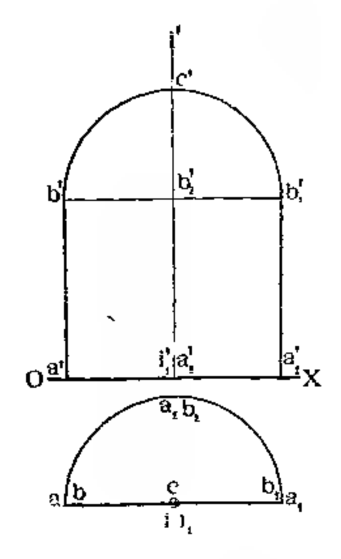
Такія поверхности удобны для образованія нишъ въ каменныхъ стѣнахъ (черт. 312).

Верхняя часть ниши ограничена четвертью поверхности шара, а остальная—поверхностью полуцилиндра.

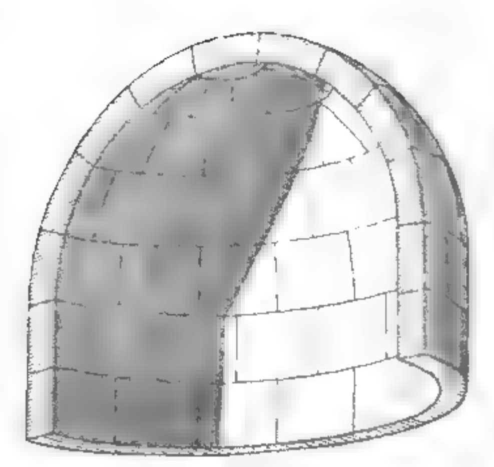
На черт. 313 показанъ примѣръ примѣненія такой поверхности къ образованію деревяннаго покрытія надъ храмомъ мормоновъ въ городѣ Большого Соляного Озера въ Америкѣ.

На черт. 314 показана такая же поверхность въ примѣненіи къ металлическому перекрытію концертнаго зала курзала въ томъ же городѣ.

Кольцо образуется вращеніемъ круга $ABCD$ (черт. 315) вокругъ оси II_1, лежащей въ его плоскости и не пересѣкающей площади круга. Кольца иногда примѣняются для очертанія цѣпей, какъ это и показано на черт. 315. На черт. 316 показано изображеніе кольца въ проекціи на V при разныхъ его поворотахъ относи-

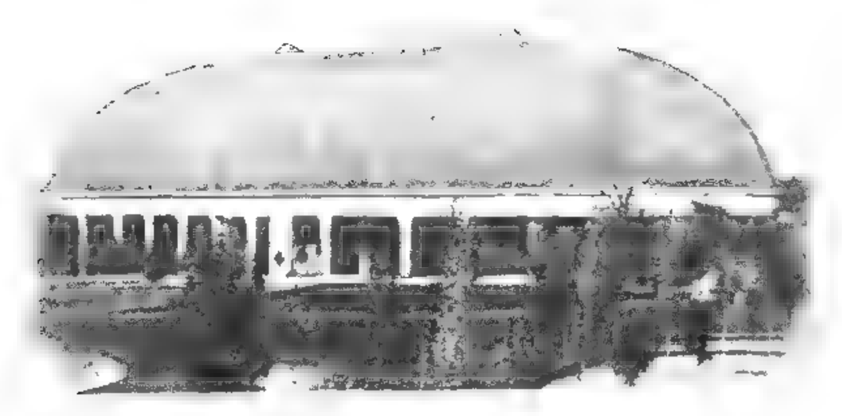


Черт. 311. Проекція ниши (Поверхность вращенія).



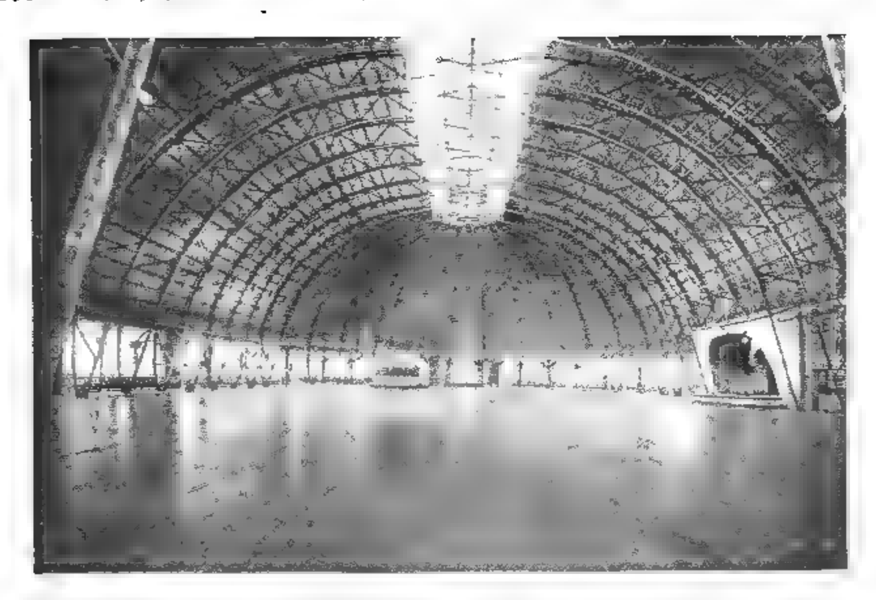
Черт. 312. Часть ниши (Поверхность вращенія).

тельно V. Если ось вращенія пересѣкаетъ кругъ, то поверхность вращенія называется *торомъ* (черт. 317).

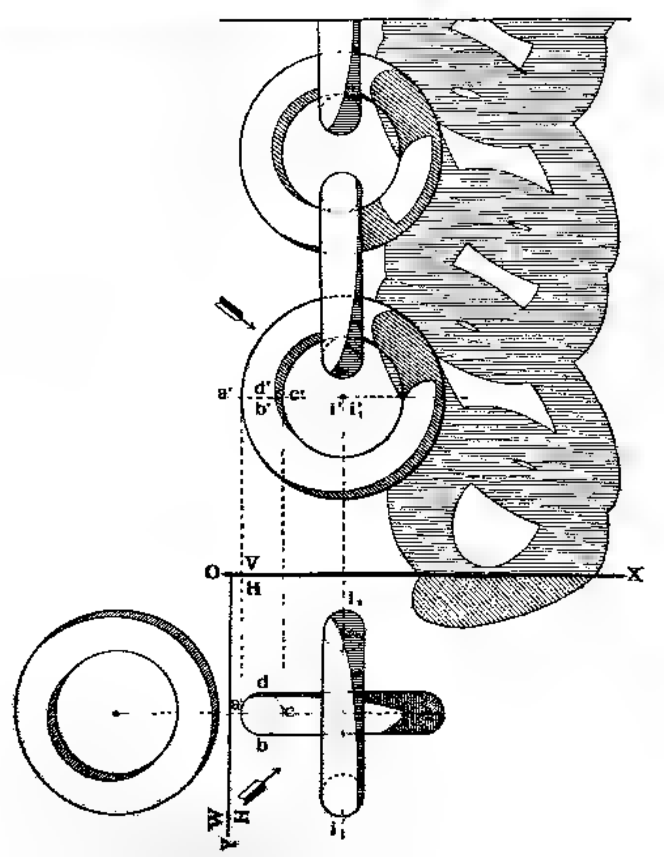


Черт. 313. Храмъ мормоновъ въ городѣ Большого Соляного Озера въ Америкѣ (Покрытіе образовано поверхностью вращенія).

Эллипсоидомъ вращенія называется поверхность, образованная вращеніемъ эллипса вокругъ одной изъ его осей (черт. 318, 319 и 320).



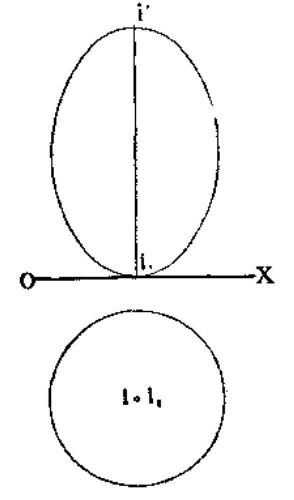
Черт. 314. Курзалъ на пляжѣ Большого Соляного Озера въ Америкѣ (Покрытіе образовано поверхностью вращенія)



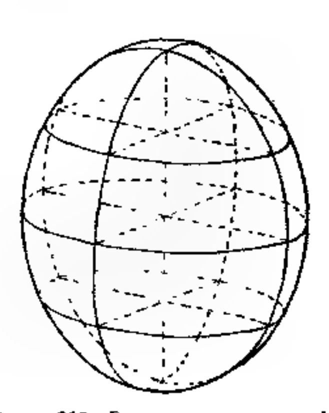
Черт. 315. Примѣненіе поверхностей вращенія (колецъ) къ образованію цѣпи

Черт. 316. Проекции кольца на V при разныхъ его положенияхъ относительно V

Черт 317. Торъ.

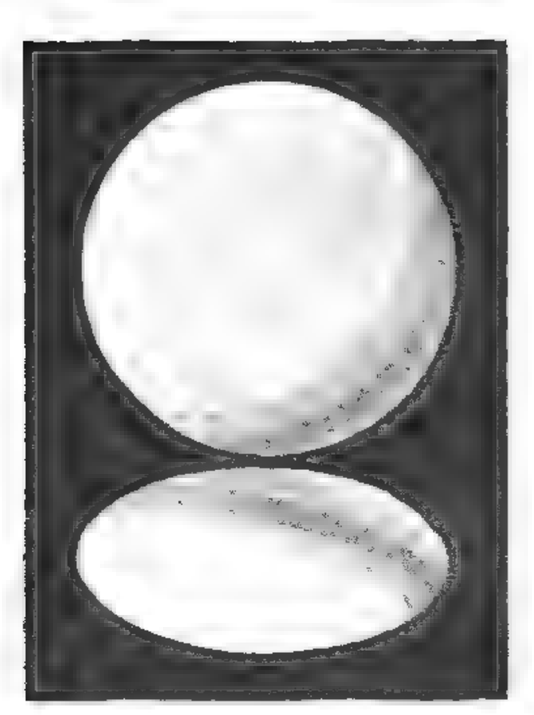


Черт. 318. Эллипсоидъ вращения.

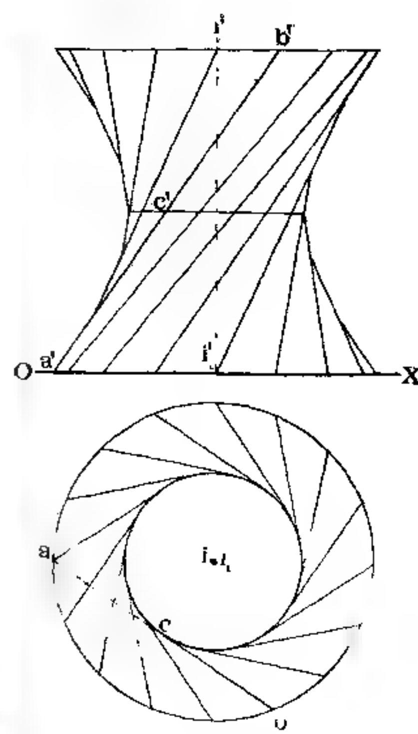


Черт. 319 Эллипсоидъ вращевія.

Гиперболоидъ вращенія образуется вращеніемъ прямой линіи AB

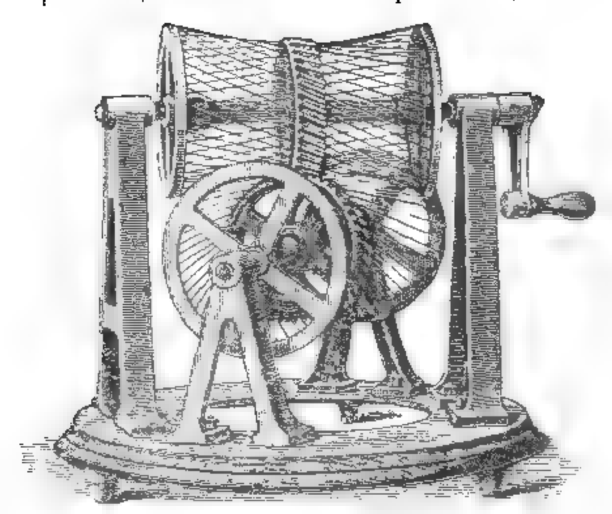


Черт. 320. Эллипсоидъ вращенія



Черт. 321 Гиперболоидъ вращенія

вокругъ оси II_1, не параллельной и не пересѣкающей AB (черт. 321).



Черт. 322. Примѣненіе гиперболоидовъ вращенія къ образованію зубчатыхъ колесъ.

При вращеніи AB точка C ея, ближайшая къ оси II_1, опишетъ

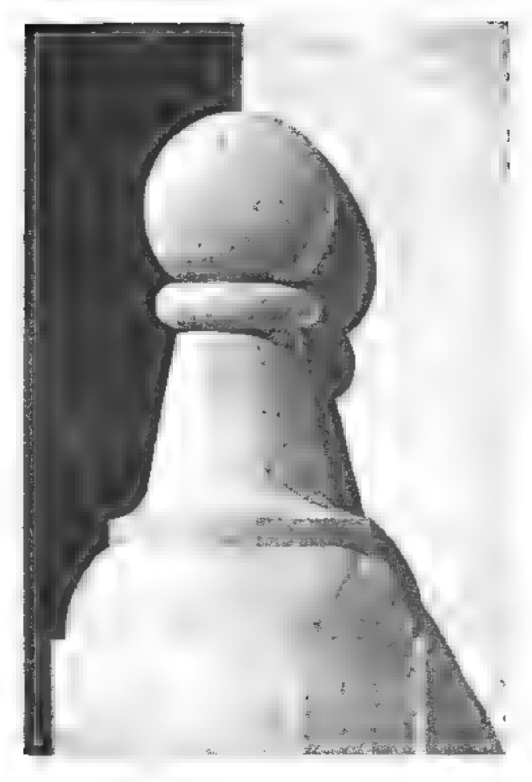
кругъ, который является геометрическимъ мѣстомъ точекъ, расположенныхъ на гиперболоидѣ и ближайшихъ къ оси II_1.

Кругъ этотъ называется *горломъ* гиперболоида. Линія, обертывающая вертикальныя проекціи производящихъ гиперболоида, или контуръ видимости гиперболоида на V, является гиперболой.

Въ техникѣ гиперболоидъ вращенія часто примѣняется для очертанія поверхности зубчатыхъ колесъ, модель которыхъ изображена на чертежѣ 322.

Очень часто, въ особенности въ архитектурѣ, примѣняются поверхности вращенія, образованныя изъ комбинацій дугъ круговъ, прямыхъ линій и т. д.

На черт. 323 показанъ примѣръ такого рода поверхности, изображающей каменную тумбу у угла дома.



Черт. 323. Сочетаніе различныхъ поверхностей вращеній.

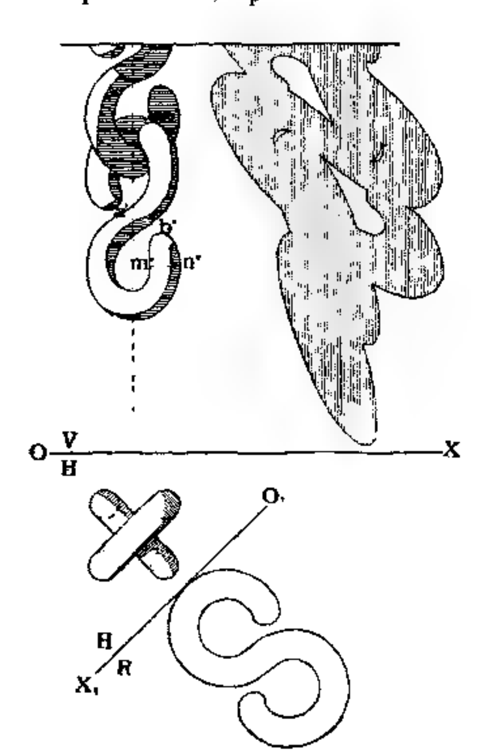
j) *Кривые цилиндры съ производящими постояннаго вида.*

Кривымъ цилиндромъ называется поверхность, образованная движеніемъ производящей кривой линіи или кривой поверхности по нѣкоторой криволинейной направляющей. Такъ какъ формы производящей и направляющей могутъ быть безконечно разнообразными, то, очевидно, можно образовать безконечно большое количество разнообразныхъ кривыхъ цилиндровъ.

Разсмотримъ способы заданія и изображенія нѣкоторыхъ кривыхъ цилиндровъ, которые находятъ себѣ примѣненіе въ техникѣ, причемъ будемъ предполагать, что производящая кривая линія или поверхность не мѣняетъ своей формы.

Кривые цилиндры съ плоскими направляющими. Образуются они движеніемъ плоской кривой линіи, обыкновенно круга, центръ котораго скользитъ по плоской кривой линіи, причемъ поверхность круга все время остается нормальной къ направляющей кривой.

На черт. 324 показанъ примѣръ примѣненія такого кривого цилиндра къ образованію звеньевъ цѣпи. Поверхность каждаго звена образована движеніемъ круга MN, центръ котораго скользитъ по плоской S—образной кривой AB, причемъ плоскость круга остается все время нормальной къ кривой AB. Для построенія проекцій случайнаго положенія производящаго круга слѣдуетъ перемѣнить плоскость проекцій V, выбравъ новую вертикальную плоскость проекцій R параллельно плоскости направляющей линіи разсматриваемаго звена. На чертежѣ 324 таковая плоскость R проведена параллельно осевой линіи верхняго звена [1]).



Черт. 324. Кривые цилиндры съ плоскими направляющими въ примѣненіи къ образованію цѣпи.

Производящіе круги въ проекціи на эту новую плоскость изобразятся прямыми линіями, перпендикулярными къ проекціи оси звена. Зная это, можно уже построить проекціи каждаго производящаго круга и въ системѣ $\frac{V}{H}$. Контуромъ проекціи звена на V и H будетъ служить обертка проекцій производящихъ круговъ.

На черт. 325 показанъ другой примѣръ примѣненія кривого цилиндра подобнаго же типа къ образованію поверхностей фляндевыхъ трубъ, которыя изображены въ двухъ положеніяхъ относительно V и въ одномъ—относительно H. Поверхность этихъ трубъ образована движеніемъ круга, центръ котораго скользитъ по плоской направляющей, составленной изъ частей прямыхъ линій и дугъ круга.

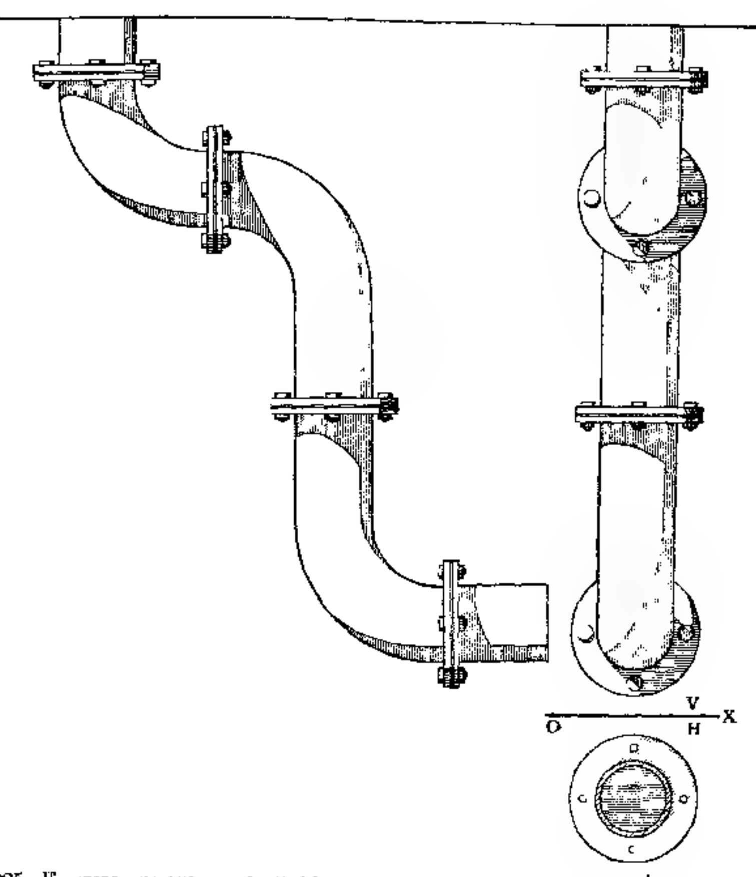
На чертежахъ 324 и 325 изображены простѣйшие виды кривыхъ цилиндровъ, именно, части кольцевыхъ поверхностей (черт. 324) въ соединеніи съ прямыми круговыми цилиндрами (черт. 325).

На черт. 326 показанъ примѣръ примѣненія кривого цилиндра къ образованію бетоннаго свода.

На чертежѣ изображена четверть свода, перекрывающаго помѣщеніе, квадратное въ планѣ. Сводъ спроектированъ на плоскости V и W.

[1]) Плоскость H замѣнена ей параллельной и касательной къ верхнему звену внизу его.

Производящая MN, четверть дуги круга, движется такъ, что конецъ ея M скользитъ по направляющей MA—дугѣ круга, причемъ плоскость производящей все время остается вертикальной и параллельной V, а радіусъ MO остается горизонтальнымъ.



Черт. 325. Кривые цилиндры съ плоскими направляющими въ примѣненіи къ образованію фланцевыхъ трубъ.

Гелисоидальный цилиндръ постояннаго плоскаго горизонтальнаго сѣченія образуется движеніемъ плоской кривой линіи, обыкновенно симметричной относительно своего центра, который скользитъ по цилиндрической винтовой линіи съ вертикальной осью; плоскость же кривой остается все время горизонтальной.

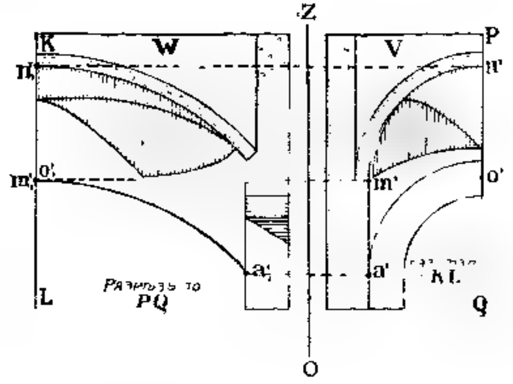
На черт. 327 показанъ примѣръ проекціи такой поверхности. Производящая ея — кругъ, центръ котораго движется по винтовой линіи $1, 2 \ldots 7, 8, 1_1, 2_1 \ldots 5_1$.

Такого рода кривые цилиндры примѣняются для очертанія колоннъ.

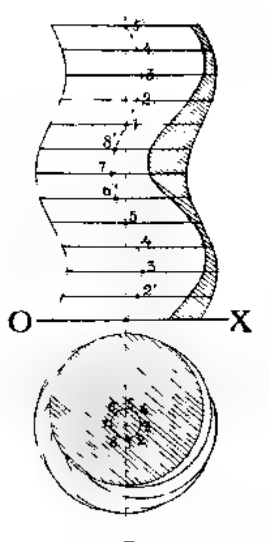
Напримѣръ, на черт. 328 показано изображеніе такихъ четырехъ колоннъ, поддерживающихъ балдахинъ надъ гробницей Св. Петра въ храмѣ Св. Петра въ Римѣ.

На чертежѣ 329 изображены проекціи еще одной колонны образованной винтообразнымъ движеніемъ заштрихованной фигуры, центръ которой скользитъ вдоль оси колонны.

Гелисоидальный цилиндръ постояннаго плоскаго меридіональнаго сѣченія образуется движеніемъ плоской кривой, одна изъ точекъ которой, чаще всего центръ, если кривая имѣетъ таковой, скользитъ по направляющей цилиндрической винтовой линіи, а плоскость производящей кривой постоянно проходитъ черезъ ось винтовой линіи.



Черт. 326. Примѣненіе гелисоидальнаго цилиндра къ образованію бетоннаго свода.



Черт. 327. Гелисоидальный цилиндръ постояннаго горизонтальнаго сѣченія.

На черт. 330 показано примѣненіе такой поверхности къ очертанію консольнаго желѣзо-бетоннаго свода подъ винтовой лѣстницей.

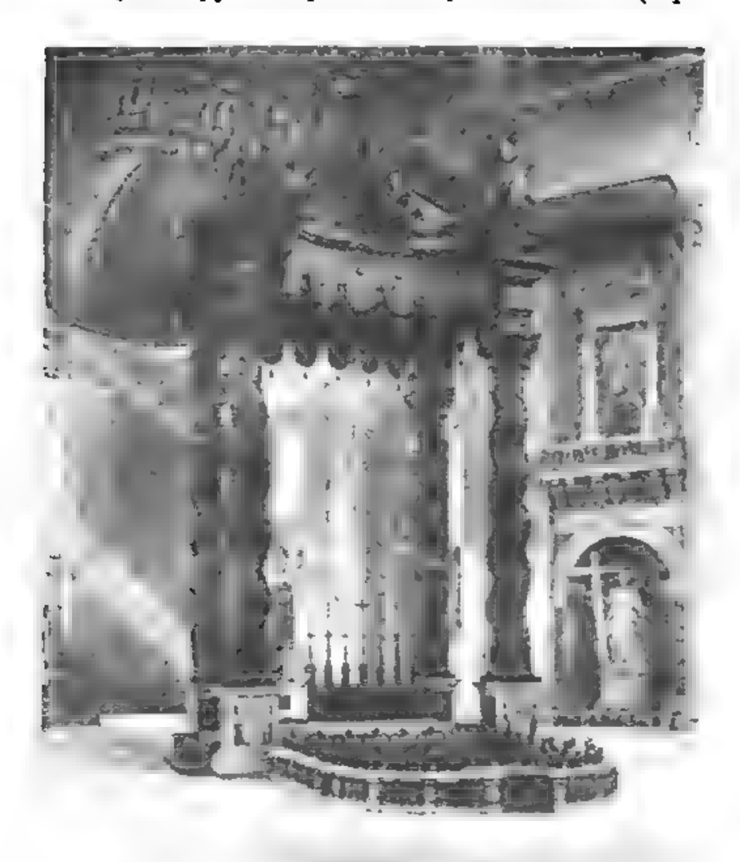
Дуга MN, равная четверти окружности, винтообразно движется вокругъ вертикальной оси II_1 лѣстницы, причемъ плоскость дуги постоянно проходитъ черезъ ось II, а концы дуги описываютъ одноосныя винтовыя линіи одинаковаго шага.

На черт. 331 показана одна вертикальная проекція этой лѣстницы съ тѣнями.

На черт. 332 показанъ еще примѣръ примѣненія подобнаго цилиндра къ очертанію перилъ винтовой лѣстницы.

Гелисоидальные цилиндры круглаго нормальнаго сѣченія образуются движеніемъ круга, центръ котораго скользитъ по цилиндрической винтовой линіи, а плоскость круга остается все время нормальна къ винтовой. Эта же поверхность можетъ быть образована движеніемъ шара, того же

радіуса, какъ и упомянутый кругъ, причемъ центръ шара движется по той же винтовой линіи. Контурами видимости этой поверхности на V и H служатъ обертки круговъ проекцій шара на V и H (черт. 333).



Черт. 328. Главный алтарь съ балдахиномъ въ храмѣ Св. Петра въ Римѣ. Примѣненіе геликоидальныхъ цилиндровъ постояннаго плоскаго горизонтальнаго сѣченія.

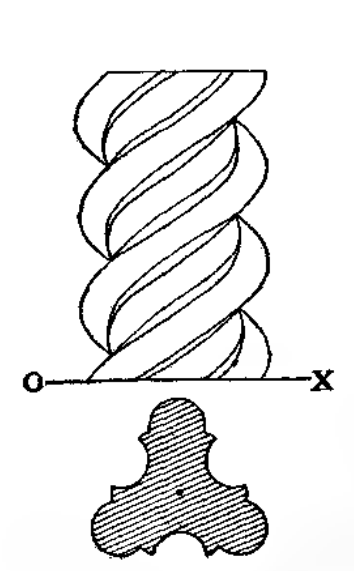
На черт. 334 показаны проекціи такого цилиндра съ тѣнями.

k) *Поверхности съ кривыми производящими перемѣннаго вида.*

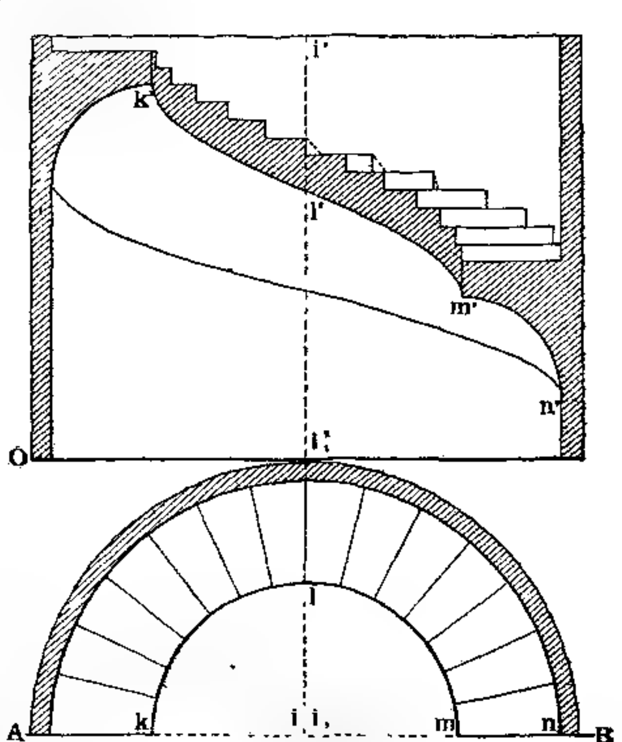
Такого рода поверхности образуются движеніемъ производящихъ: кривой линіи или кривой поверхности по нѣкоторой направляющей, причемъ видъ производящей при ея движеніи измѣняется по извѣстному закону.

Разсмотримъ нѣсколько такихъ поверхностей:

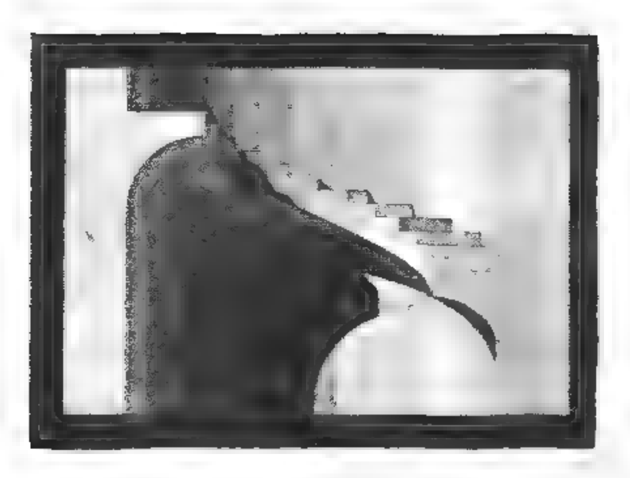
Трехъосный эллипсоидъ образуется движеніемъ эллипса при слѣдующихъ условіяхъ (черт. 335):



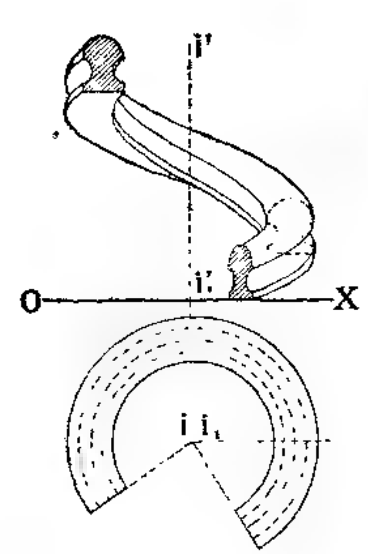
Черт. 329. Колонна, поверхность которой образована винтообразнымъ движеніемъ заштрихованной фигуры.



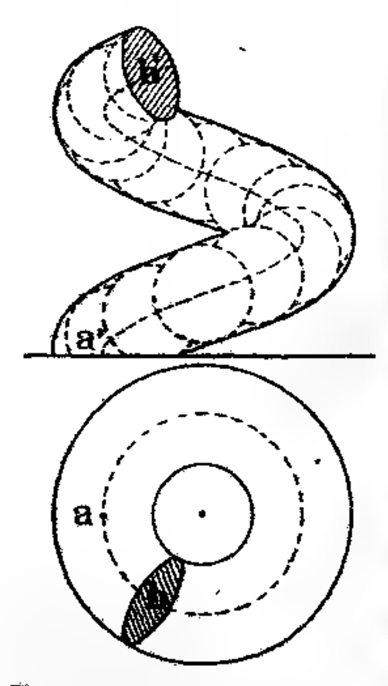
Черт. 330. Консольная поверхность подъ желѣзобетонной винтовой лѣстницей. Примѣненіе гелисоидальнаго цилиндра постояннаго плоскаго меридіональнаго сѣченія.



Черт. 331. Консольная поверхность подъ желѣзо-бетонною лѣстницей. Примѣненіе гелисоидальнаго цилиндра.



Черт. 332. Перила винтовой лѣстницы. Примѣненіе гелисоидальнаго цилиндра.



Черт. 333. Гелисоидальный цилиндръ круглаго нормальнаго сѣченія.

Черт. 334. Гелисоидальный цилиндръ круглаго нормальнаго сѣченія.

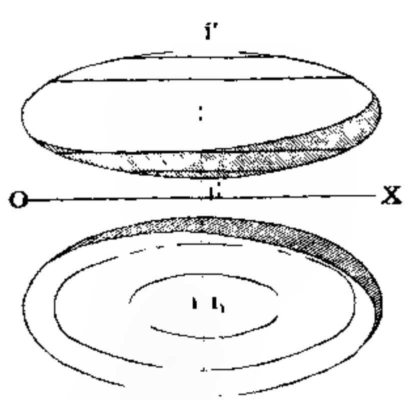
1) центръ эллипса скользитъ по оси II_1, перпендикулярной къ его плоскости.

2) производящій эллипсъ пересѣкаетъ въ двухъ точкахъ другой направляющій эллипсъ, плоскость котораго проходитъ черезъ ось II_1.

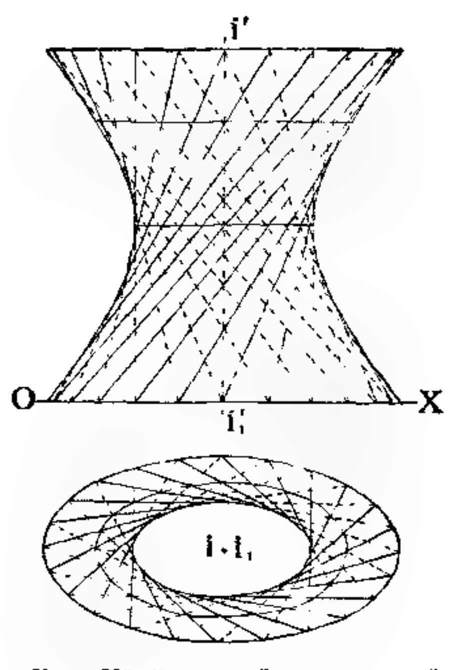
3) производящій эллипсъ измѣняетъ свои размѣры, оставаясь всегда подобнымъ и параллельнымъ своему начальному положенію.

Однополый эллиптическій гиперболоидъ образуется движеніемъ эллипса при слѣдующихъ условіяхъ (черт. 336).

1) Эллипсъ остается параллельнымъ, подобнымъ и одинаково расположеннымъ со своимъ начальнымъ положеніемъ.

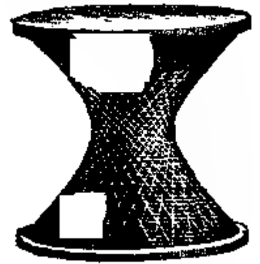


Черт. 335. Трехосный эллипсоидъ.



Черт. 336. Однополый эллиптическій гиперболоидъ.

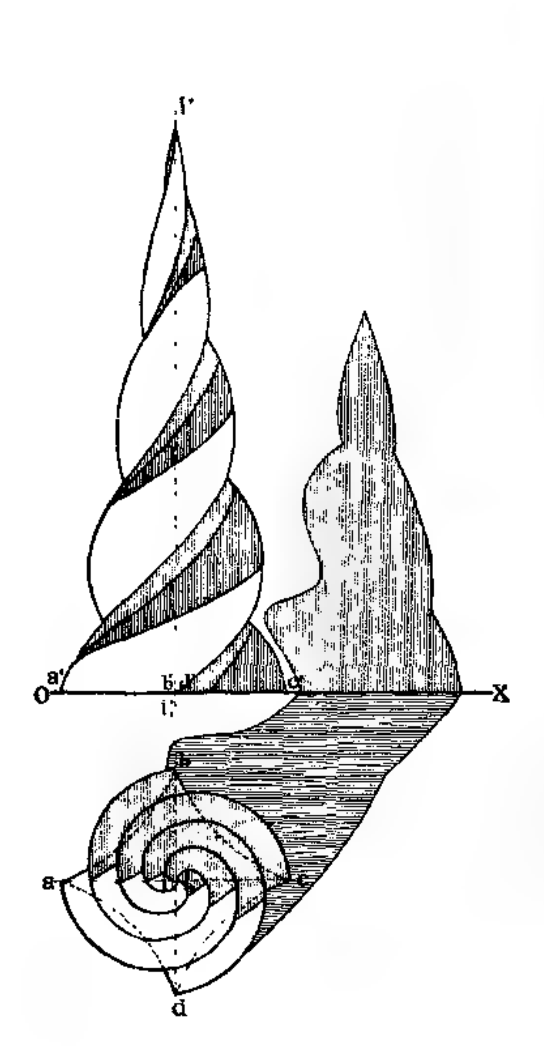
2) Эллипсъ постоянно пересѣкаетъ гиперболу, плоскость которой перпендикулярна къ плоскости эллипса. При этомъ центръ эллипса движется по оси II_1 гиперболы.


Черт. 337. Однополый эллиптическій гиперболоидъ.

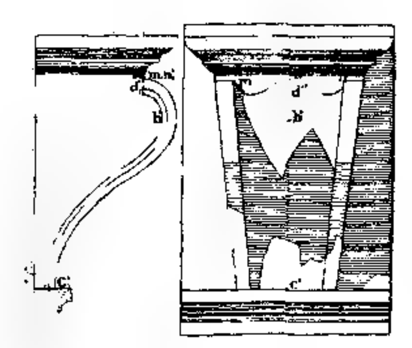
На черт. 337 изображенъ общій видъ такого гиперболоида.

Та же самая поверхность можетъ быть образована движеніемъ прямой линіи перемѣнной длины, при чемъ движеніе это подчинено слѣдующимъ условіямъ: линія должна пересѣкать два эллипса, контуры верхняго и нижняго основанія гиперболоида, и должна касаться эллиптическаго цилиндра, ось котораго проходитъ черезъ центры упомянутыхъ двухъ эллипсовъ. На черт. 336 и 337 показанъ рядъ положеній такой прямолинейной производящей.

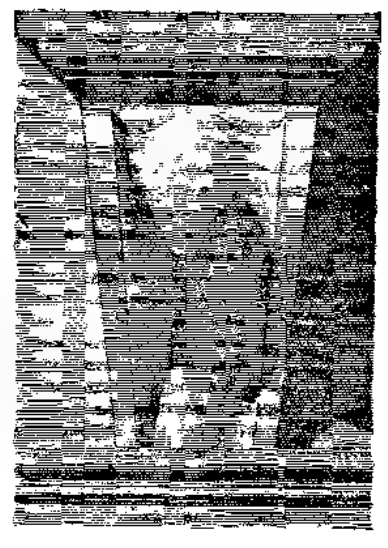
На черт. 338 изображена кривая поверхность, образованная винтообразнымъ движеніемъ квадрата $ABCD$ съ вогнутыми сторонами, центръ котораго скользитъ по оси II_1, перпендикулярной къ плоскости квадрата. Квадратъ остается все время подобнымъ самому себѣ, а стороны



Черт. 338. Поверхность съ кривою производящею перемѣннаго вида.



Черт. 339. Примѣненіе кривой поверхности съ производящей перемѣннаго вида къ образованію кронштейна



Черт 340. Примѣненіе кривой поверхности съ производящей перемѣннаго вида къ образованію кронштейна.

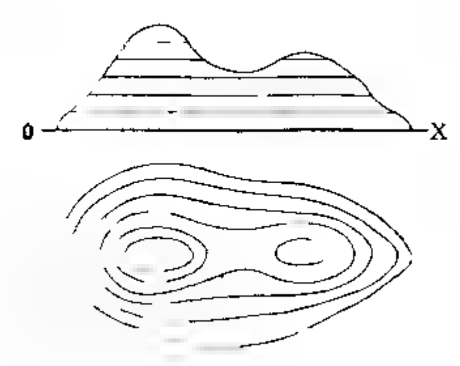
его уменьшаются пропорціонально его поступательному и вращательному движеніямъ.

На черт. 339 и 340 изображенъ кронштейнъ, какъ примѣръ кривой поверхности съ производящими перемѣннаго вида. Направляющей слу-

житъ плоская кривая *DBC*. Производящей является плоская волнистая кривая *MAN*, плоскость которой остается во все время движенія нормальной къ направляющей и которая измѣняется, оставаясь подобной начальному своему положенію. Концы производящей упираются въ боковыя стѣнки кронштейна.

1) *Графическія поверхности.*

Если образованіе поверхности не подчинено никакому геометрическому закону и является совершенно случайнымъ, то такая поверхность называется графической и изображается она графически при помощи ряда лежащихъ въ ней линій. Въ качествѣ такихъ линій чаще всего берутъ *горизонтали поверхности*, т. е. линіи сѣченія поверхности съ горизонтальными плоскостями.



Черт 341. Топографическая поверхность.

Такой способъ изображенія горизонталями примѣняется чаще всего къ изображенію топографіи или рельефа земной поверхности, почему и самыя поверхности часто называютъ *топографическими*.

На черт. 341 изображена такая поверхность при помощи ея горизонталей и контура видимости [1]).

§ 19. Пересѣченіе кривыхъ поверхностей.

Рѣшеніе задачи на пересѣченіе кривыхъ поверхностей между собою сходно съ таковою же задачей на пересѣченіе многогранниковъ. Дѣйствительно, увеличивая число реберъ и граней многогранника и уменьшая въ то же время площадь каждой грани, можно въ предѣлѣ отъ многогранника перейти къ соотвѣтственной кривой поверхности, производящія которой замѣнятъ ребра многогранника. Напримѣръ, цилиндръ можно разсматривать, какъ предѣлъ измѣненія призмы; конусъ—какъ предѣлъ измѣненія пирамиды, шаръ—какъ предѣлъ измѣненія правильнаго многогранника и т. д.

Ниже мы рѣшаемъ въ опредѣленной послѣдовательности пять основныхъ задачъ. Рѣшеніе каждой изъ нихъ основано на рѣшеніи предыдущей.

Задачи эти слѣдующія:

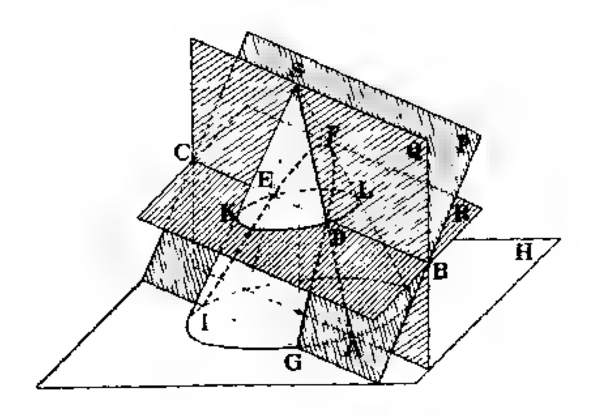
---

[1]) Относительно общаго случая образованія кривыхъ поверхностей см. В. Курдюмовъ. „Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей“ и М. Ребиндеръ „О касаніи двухъ поверхностей по нѣкоторой кривой линіи“ (Задача профессора Курдюмова).

a) Пересѣченіе кривой поверхности съ плоскостью.
b) » » » » прямой линіей.
c) » » » » многогранникомъ.
d) » » » » кривою поверхностью.
e) » » » » кривою линіей.

a) *Пересѣченіе кривой поверхности съ плоскостью.*

Громадное большинство примѣняемыхъ въ техникѣ поверхностей имѣютъ плоскія кривыя или прямолинейныя производящія. Поэтому разсмотримъ здѣсь общій пріемъ рѣшенія поставленной задачи въ пространствѣ именно для такихъ поверхностей. Если же поверхность образована движеніемъ кривой линіи двоякой кривизны, то для опредѣленія линій сѣченія такой поверхности съ плоскостью можно руководствоваться правилами, изложенными въ пунктѣ (e) настоящаго параграфа.



Черт. 342.

Пусть дана поверхность съ прямолинейными производящими, наприпримѣръ, прямой круговой конусъ (черт. 342), и требуется построить линію сѣченія ея съ плоскостью P.

Для опредѣленія искомой линіи слѣдуетъ послѣдовательно брать рядъ производящихъ конуса и находить точки пересѣченія ихъ съ плоскостью P. Соединяя полученныя точки и получимъ искомую линію сѣченія $GDFEI$.

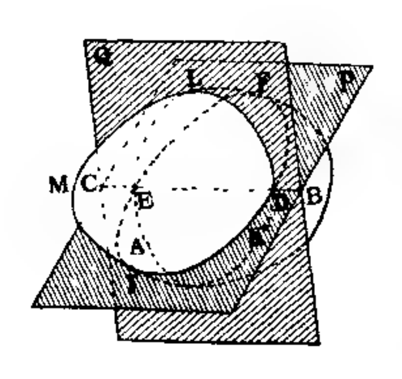
На черт. 342 показаны построенія, которыя выполняются въ пространствѣ, чтобы найти точку D пересѣченія одной изъ производящихъ SA конуса съ плоскостью P.

Черезъ SA и черезъ ось конуса проведена плоскость Q и найдена

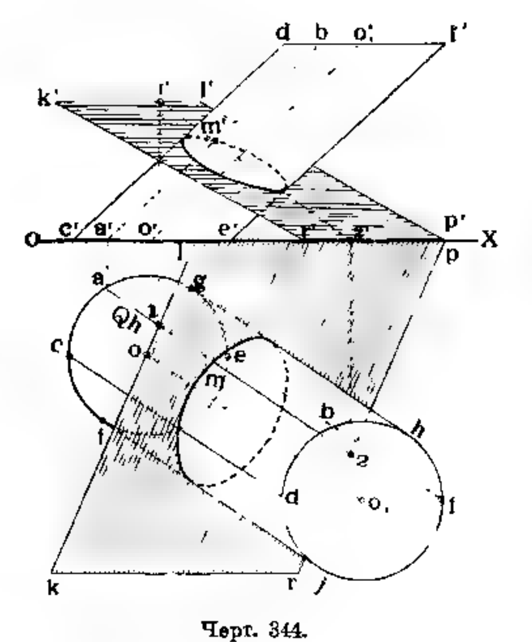
линія BC сѣченія плоскостей P и Q. Искомая точка D опредѣляется, какъ точка пересѣченія линій SA и BC.

Ту же точку B можно было бы найти и иначе, разсѣкая конусъ плоскостью B, нормальной къ его оси. Эта плоскость разсѣчетъ конусъ по кругу, а плоскость P по прямой BC. Пересѣченіе этого круга съ BC и дастъ точки, принадлежащія искомой линіи сѣченія.

Если дана поверхность не линейчатая, а съ плоскими кривыми производящими (черт. 343), то пріемъ рѣшенія задачи въ пространствѣ остается тѣмъ же самымъ. Искомая кривая строится по точкамъ. Для опредѣленія любой точки заключаемъ случайную кривую производящую ALK въ плоскость Q, находимъ линію BC сѣченія плоскостей



Черт. 343.



Черт. 344.

Q и P и замѣчаемъ точки B и E пересѣченія производящей ALK съ BC. Эти точки и будутъ принадлежать искомой линіи $IEFD$ сѣченія поверхности M съ плоскостью P.

Переходимъ теперь къ рѣшенію подобныхъ задачъ въ проекціяхъ.

На черт. 344 даны проекціи цилиндра круглаго горизонтальнаго сѣченія и плоскости $KLPR$; требуется построить линію сѣченія плоскости съ цилиндромъ.

Выберемъ случайную производящую AB цилиндра и найдемъ обычнымъ способомъ точку M пересѣченія ея съ данной плоскостью. (Вспомогательныя плоскость Q и линія **1,2**).

Взявъ рядъ производящихъ цилиндра, можно найти рядъ точекъ пересѣченія ихъ съ данной плоскостью. Соединяя полученныя точки, получимъ искомую линію сѣченія. Изъ числа производящихъ цилиндра слѣ-

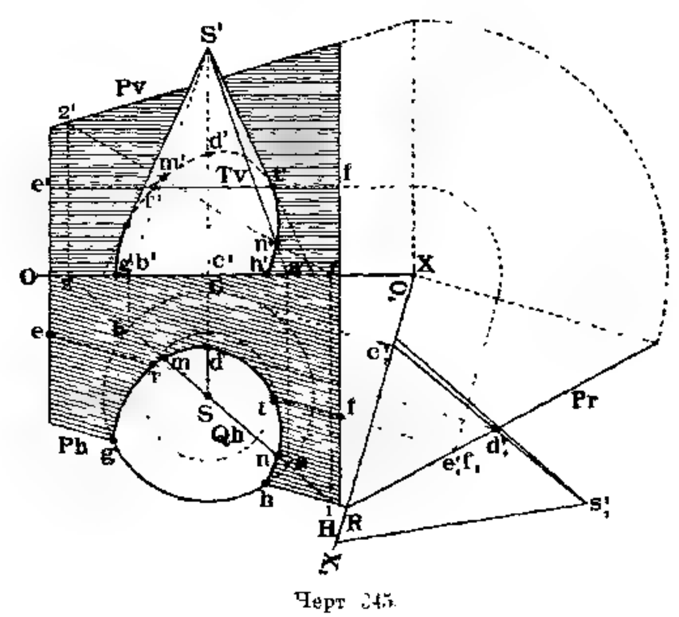
дуетъ брать также и производящія отдѣла или контурныя производящія цилиндра. Таковыми являются линіи CD, EF, GH и IJ.

Разсмотримъ второй примѣръ рѣшенія подобной же задачи.

Данъ прямой круговой конусъ и плоскость P (черт 345). Построить линію ихъ сѣченія.

Выбираемъ случайную производящую SA конуса и находимъ точку N пересѣченія ея съ P. (Вспомогательная плоскость Q и прямая **1,2**).

Подобнымъ же образомъ найдена и точка M пересѣченія производящей SB съ P.



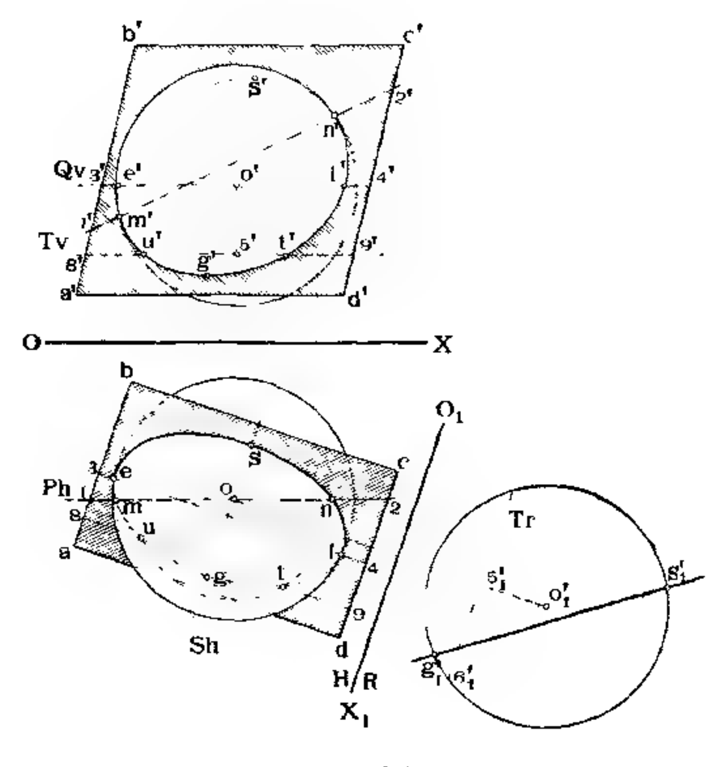
Черт 345.

Возьмемъ теперь профильную производящую SC конуса. Чтобы построить точку пересѣченія ея съ плоскостью P, перемѣнимъ плоскость проекцій H на R, выбравъ R перпендикулярно H и, напримѣръ, еще и $\perp$ къ P. Построимъ проекціи конуса и плоскости P на R. Такъ какъ $P \perp R$, то проекціей плоскости P на R будетъ ему служить прямая линія Pr, слѣдъ P на R. Съ этой же линіей сольется и проекція на R искомой линіи сѣченія конуса съ плоскостью P. Находимъ проекцію $s_1'c_1'$ производящей SC на R и замѣчаемъ точку d'. пересѣченія Pr съ $s_1'c_1'$. Точка D и будетъ пересѣченіемъ SC съ P. Остается только точку D перенести въ систему $\frac{V}{H}$.

Вмѣсто прямолинейныхъ производящихъ конуса можно было бы брать его круговыя производящія. Напримѣръ, разсѣчемъ конусъ и плоскость P плоскостью T, нормальной къ оси конуса. Плоскость T пере-

сѣчетъ конусъ по кругу, а плоскость P по прямой EF. Точки R и T пересѣченія круга съ EF будутъ также принадлежать искомой линіи сѣченія.

На чертежѣ еще отмѣчены точки G и H пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ конуса и плоскости. Эти точки, очевидно также принадлежать къ искомой линіи сѣченія.



Черт. 346.

Рѣшимъ теперь задачу на построеніе линій сѣченія плоскости съ шаромъ.

На черт. 346 даны проекціи шара и плоскости P, ограниченной четыреугольникомъ $ABCD$. Находимъ сначала пересѣченіе съ P экватора шара и меридіана его параллельнаго V. Для этого заключаемъ меридіанъ въ плоскость $P \parallel V$ и находимъ линію **12** пересѣченіе P съ $ADCD$. Точки M и N пересѣченія найденной линіи съ меридіаномъ и будутъ принадлежать искомой линіи сѣченія. Далѣе заключаемъ экваторъ въ плоскость Q и находимъ линію **34** сѣченія Q съ $ABCD$. Точки E и F пересѣченія линіи **34** съ экваторомъ будутъ также принадлежать искомой линіи.

Найдемъ высшую и низшую точки искомой линіи. Для этого проведемъ черезъ центръ шара плоскость S перпендикулярную къ H и къ $ABCD$ ($Sh \perp ad$). Кругъ сѣченія шара съ S и пересѣчетъ $ABCD$ въ искомыхъ точкахъ. Для нахожденія ихъ перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, выбравъ $R \perp ABCD$ и $\perp H$. Тогда на R кругъ сѣченія шара съ S спроектируется въ кругъ же, а плоскость $ABCD$ въ прямую. Точки G и S пересѣченія этой прямой съ кругомъ и опредѣляютъ наивысшую и наинизшую точки искомой кривой линіи. Остается лишь перенести эти точки въ систему $\frac{V}{H}$

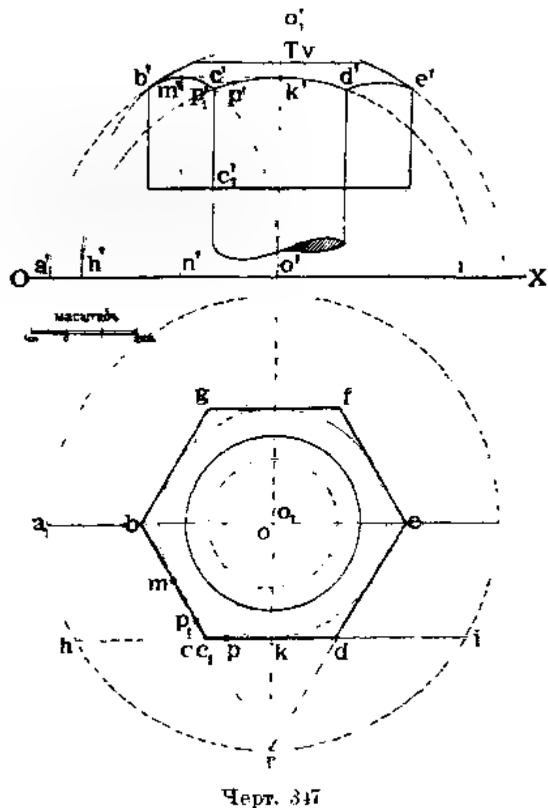
Опредѣлимъ теперь случайныя точки кривой сѣченія. Для этого проведемъ плоскость T параллельно H.

Эта плоскость пересѣчетъ шаръ по кругу радіуса $5_1'6_1'$, а плоскость $ABCD$ по прямой **89**.

Пересѣченіе такого круга съ прямой **89** и опредѣлитъ точки U и T, принадлежащія искомой линіи сѣченія.

Продолжая построеніе подобнымъ образомъ, можно опредѣлить еще рядъ точекъ искомой кривой и затѣмъ соединить ихъ по лекалу.

Такъ какъ въ пространствѣ линіей сѣченія шара съ плоскостью является кругъ, то проекціями этого круга будутъ эллипсы. Поэтому, при построеніи этихъ эллипсовъ, можно найти по нѣсколькимъ точкамъ оси эллипсовъ, а затѣмъ строить ихъ остальныя точки, пользуясь пріемами указываемыми въ черченіи.



Черт. 347

Задача № 24.

Построить проекціи головки болта, образованной слѣдующимъ образомъ (черт. 347).

Боковая поверхность головки ограничена правильной шестигранной призмой, описанной вокругъ цилиндра, діаметра 6,5 сант

Верхняя поверхность головки ограничена шаровой поверхностью діаметра 13 сант. и срѣзана горизонтальной плоскостью въ разстояніи 0,5 сантиметра отъ верхней точки очертанія боковой грани.

Высота головки $3^1/_2$ сант. Діаметръ болта $3^3/_4$ сант.

Рѣшеніе.

Строимъ въ планѣ правильный шестиугольникъ *bcdefg*, описанный вокругъ круга радіуса (въ соотвѣтственномъ масштабѣ) 6,5 сант. Этотъ шестиугольникъ будетъ служить горизонтальной проекціей боковыхъ граней головки болта. Далѣе строимъ проекціи полушара діаметромъ 13 сант. съ центромъ въ точкѣ *O*, лежащей на оси призмы боковыхъ граней болта. Находимъ линіи сѣченія послѣднихъ съ поверхностью шара.

Въ пространствѣ таковыми линіями являются дуги круговъ.

Линія сѣченія грани *CD* съ этимъ шаромъ спроектируется на *V* въ видѣ дуги круга радіуса

$$hk = ki = h'o'.$$

Линія сѣченія грани *BC* съ шаромъ спроектируется на *V* въ видѣ дуги эллипса, большая полуось *m'n'* котораго равняется отрѣзку $k'o' = hk$, а меньшая ось *h'o'* котораго равна *hk*.

Фигуру дуги *b'p'* этого эллипса можно разсматривать, какъ проекцію дуги *CKD* круга, повернутаго вокругъ оси CC_1 такъ, чтобы плоскость *CD* совпала съ гранью *BC*. На чертежѣ показаны построенія для опредѣленія проекцій точки *P* въ повернутомъ ея положеніи P_1.

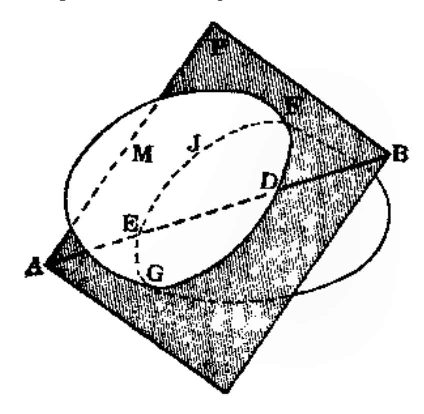
Далѣе проводимъ плоскость *T* въ разстояніи отъ точки *K*, равномъ 0,5 сант., и находимъ кругъ сѣченія *T* съ шаромъ, служащій верхнимъ ограниченіемъ головки болта.

Остается найти теперь лишь нижнюю грань головки въ разстояніи 3,5 сант. отъ грани *T* и построить проекціи стержня болта ($D = 3^3/_4$ сант.), что уже не представляетъ затрудненій.

---

b). *Пересѣченіе кривой поверхности съ прямою линіей.*

Рѣшеніе этой задачи основано на рѣшеніи задачи, только что разсмотрѣнной въ пунктѣ (*a*) этого параграфа.



Черт. 348.

Общій пріемъ рѣшенія задачи на опредѣленіе точки пересѣченія прямой линіи *AB* съ любой кривой поверхностью *M* (черт. 348) заключается въ слѣдующемъ.

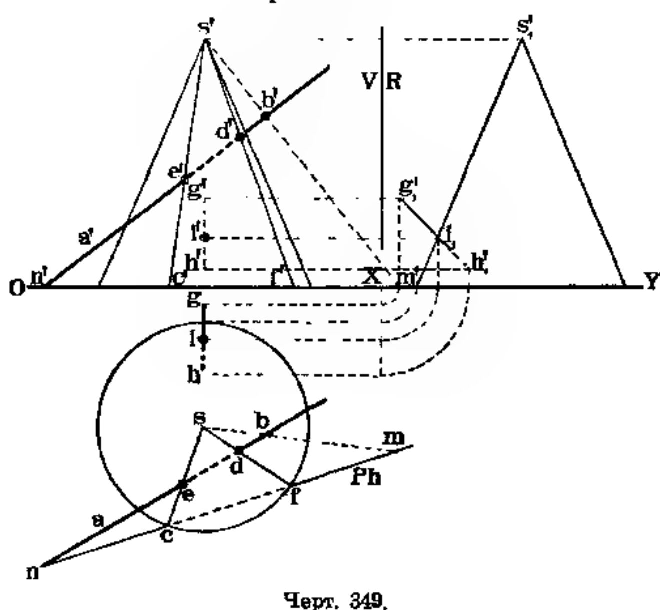
Проводимъ черезъ *AB* случайную плоскость *P*, находимъ линію *FGJ* сѣченія *P* съ *M* и замѣчаемъ точки *D* и *E* пересѣченія *AB* съ *FGJ*. Точки *D* и *E* и будутъ искомыми.

Въ частности плоскость *P*, проходящую черезъ *AB*, слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы она пересѣкала поверхность *M* по возможно простымъ линіямъ—прямой и кругу.

Прослѣдимъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ подобнаго рода.

Найти точки пересѣченія прямой AB съ конусомъ (черт. 349).

Проводимъ черезъ прямую AB плоскость P такъ, чтобы она проходила черезъ вершину S конуса. Для опредѣленія такой плоскости двумя линіями, достаточно соединить точку S хотя бы съ точкой B прямой AB. Плоскость SBA пересѣчетъ конусъ по производящимъ послѣдняго. Построимъ эти производящія. Для этого находимъ слѣдъ Ph плоскости SBA и замѣчвемъ точки C и F пересѣченія слѣдовъ плоскости P и конуса.



Черт. 349.

Линіи SC и SE и будутъ производящими, по которымъ плоскость P пересѣкаетъ конусъ. Замѣчаемъ теперь точки D и E пересѣченія данной прямой AB съ найденными производящими. Точки D и E и будутъ искомыми.

Если данная линія, напримѣръ, GH лежитъ въ одной профильной плоскости съ вершиной S конуса, то для опредѣленія точки пересѣченія прямой съ конусомъ удобно примѣнить методъ перемѣны плоскостей проекцій.

Перейдемъ напримѣръ, отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{R}$, гдѣ R профильная плоскость. Спроектируемъ на R конусъ и прямую GH а найдемъ точку i_1' пересѣченія $g_1'h_1'$ съ контуромъ проекціи конуса. Точка I будетъ искомой. Остается ее лишь перенести въ систему $\frac{V}{H}$ [1]).

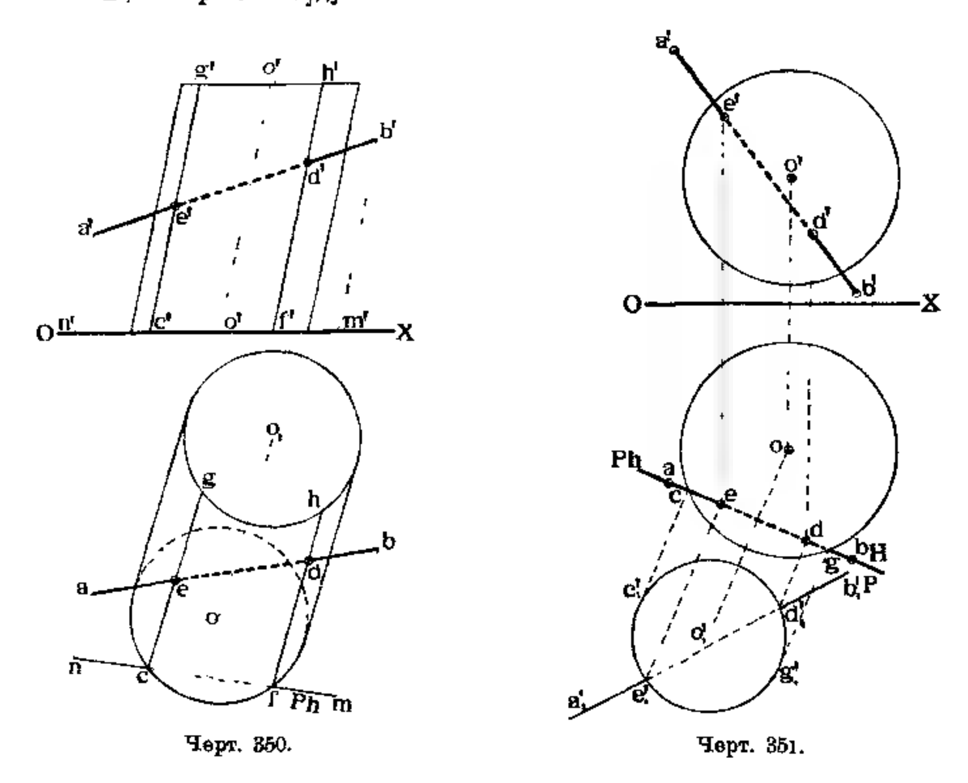
---

[1]) Рѣшеніе задачи въ случаѣ, если вершина конуса лежитъ внѣ предѣловъ чертежа, см. Н. Рынинъ «Педорѣзы», стр. 76 и его же статью въ извѣстіяхъ СПБ Политехнич. Инст. 1905 г. Т. III.

Найти точки пересѣченія прямой AB съ цилиндромъ круглаго горизонтальнаго сѣченія (черт. 350).

Для рѣшенія этой задачи проводимъ черезъ AB плоскость P параллельную оси OO_1 цилиндра, находимъ слѣдъ Ph этой плоскости и замѣчаемъ точки C и F пересѣченія слѣда Ph со слѣдомъ цилиндра.

Приводимъ черезъ точки C и F производящія цилиндра CG и FB и замѣчаемъ пересѣченіе послѣднихъ съ данною прямою AB въ точкахъ E и D, которыя и будутъ искомыми.



Черт. 350. Черт. 351.

На черт. 351 рѣшена задача. **Построить точки пересѣченія прямой AB съ шаромъ.**

Прямая AB заключена въ плоскость P, перпендикулярную къ H. Плоскость P пересѣкаетъ шаръ по кругу. Чтобы спроектировать послѣдній безъ искаженія, переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{P}{H}$.

Строимъ въ новой системѣ проекціи круга и прямой и замѣчаемъ точки e_1' и g_1' ихъ пересѣченія. Переходимъ теперь обратно къ системѣ $\frac{V}{H}$ и находимъ окончательно въ ней проекціи искомыхъ точекъ D и E.

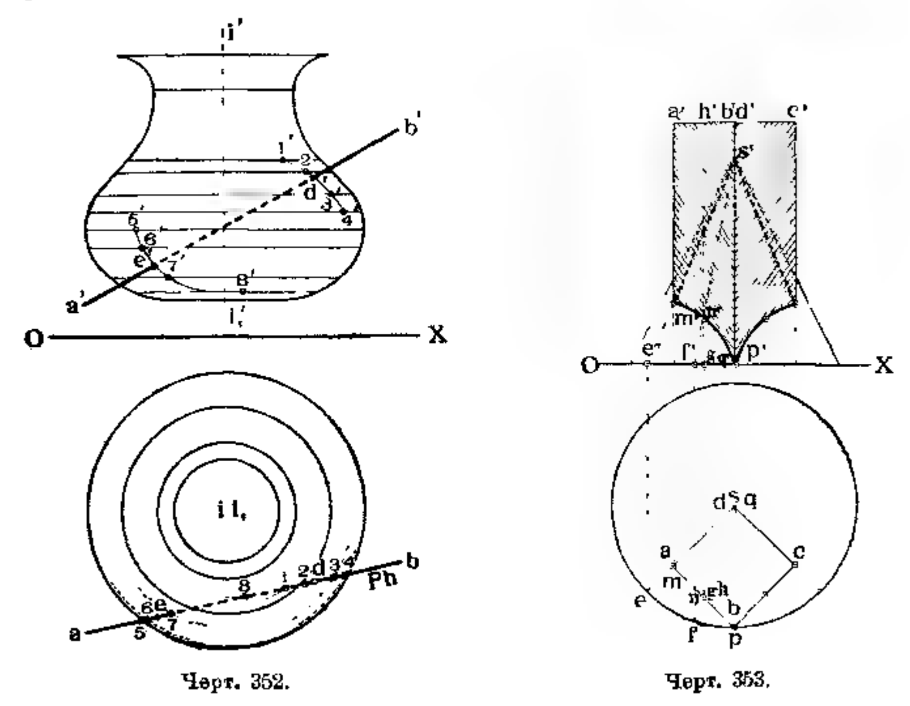
На черт. 352 показано рѣшеніе еще одной задачи: **Найти точки пересѣченія прямой AB съ поверхностью, образованной вращеніемъ**

кривой случайнаго вида вокругъ оси II_1. Заключаемъ AB въ плоскости P, перпендикулярную къ H и строимъ линію сѣченія P съ поверхностью вращенія. Для этого проводимъ на послѣдней рядъ круговъ на разныхъ высотахъ, приблизительно около предполагаемыхъ мѣстъ, гдѣ могутъ быть искомыя точки.

Далѣе находимъ точки **1**, **2**, **3**, **4** и **5**, **6**, **7**, **8** пересѣченія проведенныхъ круговъ съ плоскостью P; кривыя **1234** и **5678** будутъ служить линіями сѣченія плоскости P съ поверхностью вращенія. Замѣчаемъ теперь точки D и E пересѣченія данной прямой AB съ построенными кривыми. Точки D и E будутъ искомыми.

c) *Пересѣченіе кривой поверхности съ многогранникомъ.*

Такъ какъ многогранникъ заключаетъ въ себѣ рядъ прямыхъ линій — реберъ, и рядъ плоскостей — граней, то задача на пересѣченіе его поверхности съ любою кривой поверхности сводится къ задачамъ на пересѣченіе кривой поверхности съ прямою линіей или съ плоскостью.



Черт. 352.

Черт. 353.

На черт. 353 показанъ примѣръ рѣшенія подобной задачи.

Данъ прямой круговой конусъ и прямая призма квадратнаго сѣченія. Одно изъ реберъ призмы совпадаетъ съ осью конуса. Требуется поставить линіи сѣченія конуса и призмы.

Грань ADQ призмы пересѣкаетъ конусъ по производящей SE послѣдняго. Точка M пересѣченія ребра AM призмы съ производящей SE будетъ служить точкой пересѣченія ребра AM съ поверхностью конуса. Далѣе, ребро BP призмы пересѣкается съ кругомъ основанія конуса въ точкѣ P.

Линія сѣченія грани ABP призмы съ конусомъ пройдетъ черезъ точки M и P. Для построенія случайной точки кривой MP проведемъ какую нибудь производящую SF конуса и находимъ точку N пересѣченія ея съ гранью ABP. Точка N будетъ принадлежать кривой MP. Продолжая подобныя построенія, можно найти рядъ точекъ кривой MP, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить между собой плавной кривой. Остальныя линіи сѣченія будутъ симметричны съ найденными.

d) *Пересѣченіе кривыхъ поверхностей другъ съ другомъ.*

Общіе способы рѣшенія задачъ въ пространствѣ на построеніе линій сѣченія кривыхъ поверхностей другъ съ другомъ заключаются въ слѣдующемъ:

Искомая кривыя линіи строятся по точкамъ, которыя можно опредѣлить слѣдующимъ способомъ:

1-й способъ. Если хотя бы одна изъ поверхностей имѣетъ прямолинейныя производящія, то находимъ послѣдовательно точки пересѣченія таковыхъ съ другой поверхностью такъ, какъ это было указано въ пунктѣ *b* этого параграфа (стр. 218). Соединяя полученныя точки, получимъ искомую кривую.

2-й способъ. Обѣ данныя поверхности пересѣкаемъ рядомъ вспомогательныхъ плоскостей и находимъ линіи сѣченія каждой такой плоскости съ обѣими данными поверхностями. Точки пересѣченія между собой каждой пары найденныхъ линій будутъ, очевидно, принадлежать искомой линіи сѣченія.

Соединяя эти точки плавной кривой, получимъ искомую кривую линію.

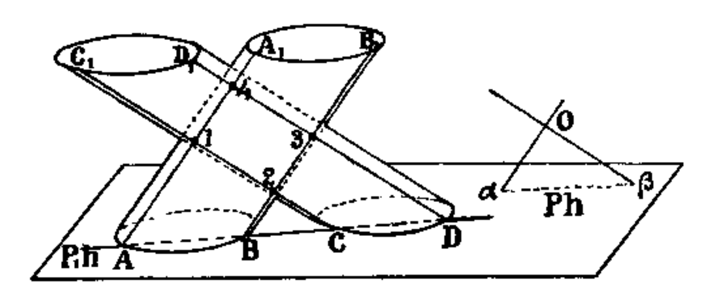
3-й способъ. Обѣ данныя поверхности пересѣкаемъ рядомъ вспомогательныхъ кривыхъ поверхностей, но притомъ такихъ, что линіями сѣченія ихъ съ данными двумя являются, по возможности, простыми для построеній, напримѣръ, прямыми линіями или кругами.

Очевидно, что если соединить между собою рядъ точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ найденныхъ линій, то и получится искомая кривая линія сѣченія данныхъ поверхностей.

Разсмотримъ примѣненіе этихъ способовъ на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Построеніе линіи сѣченія двухъ цилиндровъ.

Примѣнимъ для рѣшенія этой задачи 2-й способъ (черт. 354). Чтобы построить точки искомой линіи сѣченія дѣлаемъ въ простран-



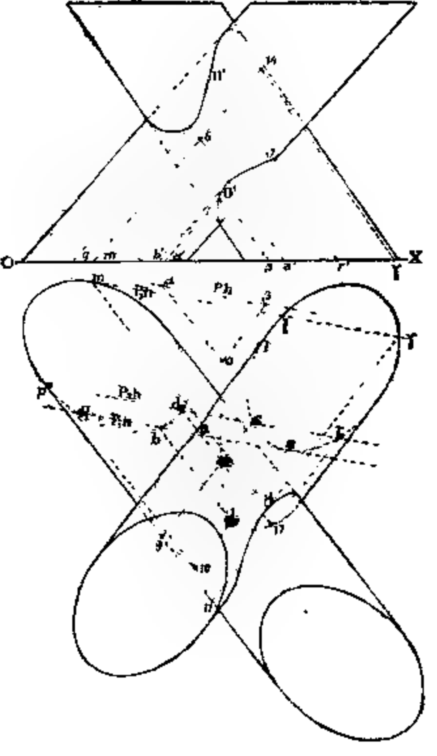
Черт. 354.

ствѣ слѣдующія построенія. Черезъ случайную точку O проводимъ линіи $O\alpha$ и $O\beta$, параллельныя производящимъ обоихъ цилиндровъ, и находимъ слѣдъ Ph плоскости, въ которой лежатъ обѣ эти линіи.

Если мы теперь будемъ разсѣкать цилиндры плоскостями, параллельными P, то въ сѣченіи получатся прямыя линіи, пересѣченіе каковыхъ другъ съ другомъ и дадутъ точки искомой кривой линіи.

На черт. 354 проведена одна изъ такихъ плоскостей P_1, и найдены производящія AA_1, BB_1 и CC_1, DD_1 сѣченія ея съ обоими цилиндрами. Пересѣченіе этихъ производящихъ другъ съ другомъ опредѣляетъ четыре точки 1, 2, 3, 4 искомой линіи сѣченія.

На черт. 355 показано рѣшеніе этой же задачи въ проекціяхъ. Выбираемъ случайную точку O, черезъ нее проводимъ линіи $O\alpha$ и $O\beta$, параллельныя производящихъ цилиндровъ, и находимъ горизонтальный слѣдъ Ph плоскости, заключающей въ себѣ обѣ эти линіи.



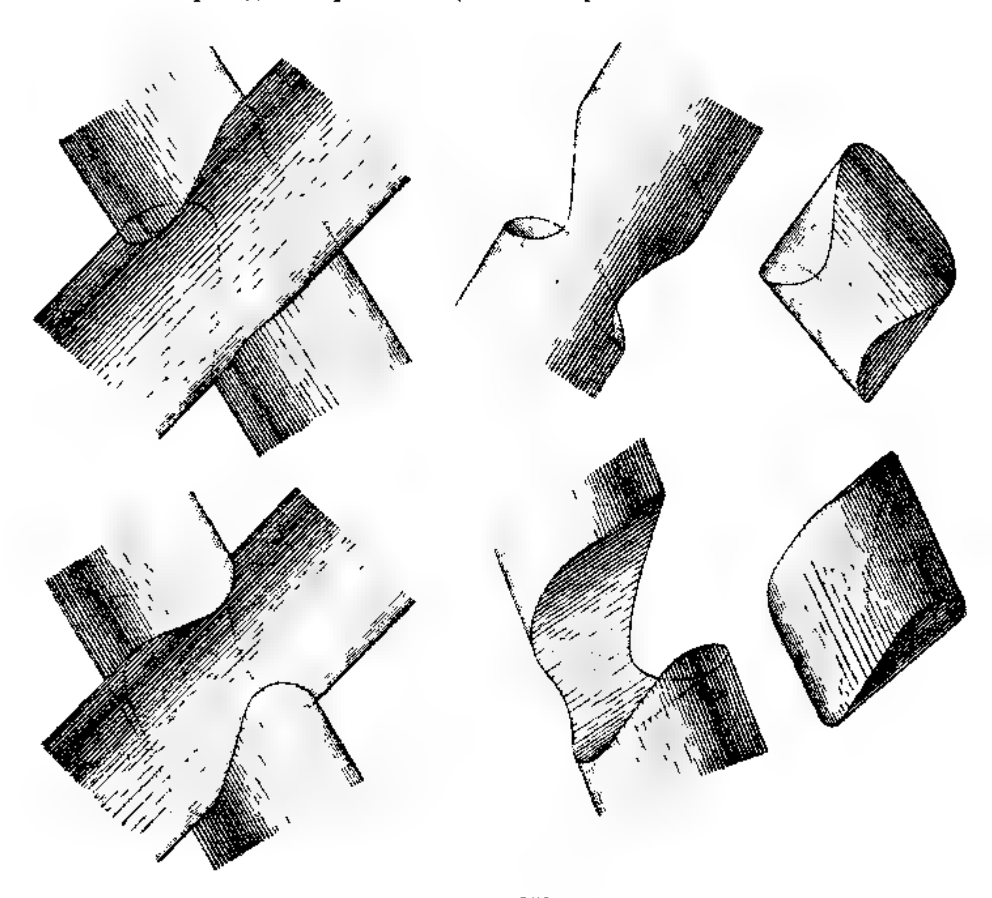
Черт. 355.

Далѣе, проведемъ плоскость P_1, параллельную P, такъ, чтобы слѣдъ P_1h коснулся слѣда одного изъ цилиндровъ въ точкѣ a.

Замѣчаемъ точки b и q пересѣченія P_1h со слѣдомъ другого цилидра и проводимъ черезъ a, b и q производящіе цилиндровъ.

Пересѣченіе этихъ производящихъ и дастъ точки **1** и **10**, принадлежащія искомой кривой.

Проводимъ теперь вторую плоскость $P_2 \parallel P$ и находимъ точки r, c, d, p пересѣченія слѣда ея P_2h со слѣдами обоихъ цилиндровъ. Черезъ эти точки проводимъ производящія цилиндровъ и замѣчаемъ ихъ взаимныя пересѣченія въ точкахъ **2**, **9**, и **11** и **17**, каковыя также будутъ принадлежать искомой линіи.



Черт. 356.

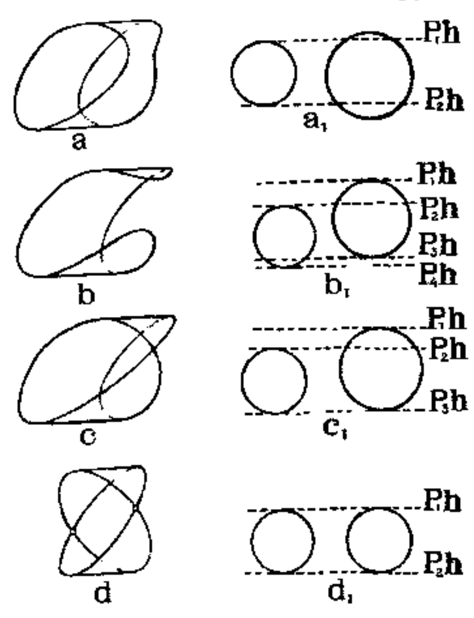
На чертежѣ проведена еще плоскость P_3, слѣдъ которой P_3h касается слѣда лѣваго цилиндра, и найдены подобнымъ же образомъ еще двѣ точки **6** и **14** искомой линіи.

Продолжая подобныя построенія, можно найти еще проекціи ряда точекъ искомой линіи.

Соединяя эти точки по лекалу плавной кривой, получимъ проекціи искомой линіи.

На черт. 356 показаны проекціи: общаго вида обоихъ пересѣкающихся цилиндровъ, одного изъ нихъ безъ части его, отсѣкаемой другимъ, и части, общей обоимъ цилиндрамъ.

Два цилиндра могутъ пересѣкаться: 1) по двумъ отдѣльнымъ кривымъ линіямъ (черт. 357*a*), 2) по одной кривой линіи (черт. 357*b*); 3) по двумъ кривымъ линіямъ, имѣющимъ одну общую точку (черт. 357*c*) и 4) по двумъ кривымъ, пересѣкающимся въ двухъ точкахъ (черт. 357*d*)



Черт 357.

Какой изъ этихъ четырехъ случаевъ имѣетъ мѣсто въ каждой данной задачѣ, можно судить по тому, какъ расположены слѣды *Ph* упомянутыхъ ранѣе вспомогательныхъ плоскостей относительно слѣдовъ цилиндровъ.

На черт. 358 справа показаны взаимныя расположенія горизонтальныхъ слѣдовъ плоскостей и цилиндровъ, соотвѣтствующихъ каждому изъ упомянутыхъ четырехъ видовъ кривыхъ линій.

Въ общемъ случаѣ два цилиндра пересѣкаются по кривой линіи двоякой кривизны. Въ частномъ же случаѣ, если оба цилиндра описаны вокругъ одного и того-же шара, то линія ихъ сѣченія является плоской [1]).

Задача № 25. На чертежѣ 358 показаны проекціи двухъ прямыхъ круговыхъ цилиндрическихъ сводовъ, оси которыхъ горизонтальны, взаимно перпендикулярны и пересѣкаются въ точкѣ *D*, а радіусы внутреннихъ и наружныхъ поверхностей которыхъ соотвѣтственно [2]) одинаковы.

Построить линіи сѣченія сводовъ.

Рѣшеніе. Согласно вышеприведеннаго замѣчанія линіи сѣченія цилиндровъ будутъ кривыми плоскими, а такъ какъ цилиндры круговые, то линіями сѣченія ихъ будутъ эллипсы. Таковыхъ эллипсовъ будутъ два: въ планѣ они спроектируются въ видѣ діагоналей квадратнаго помѣщенія, перекрываемаго сводами.

На плоскости же *V* и *W* эти эллипсы спроектируются въ видѣ круговъ.

---

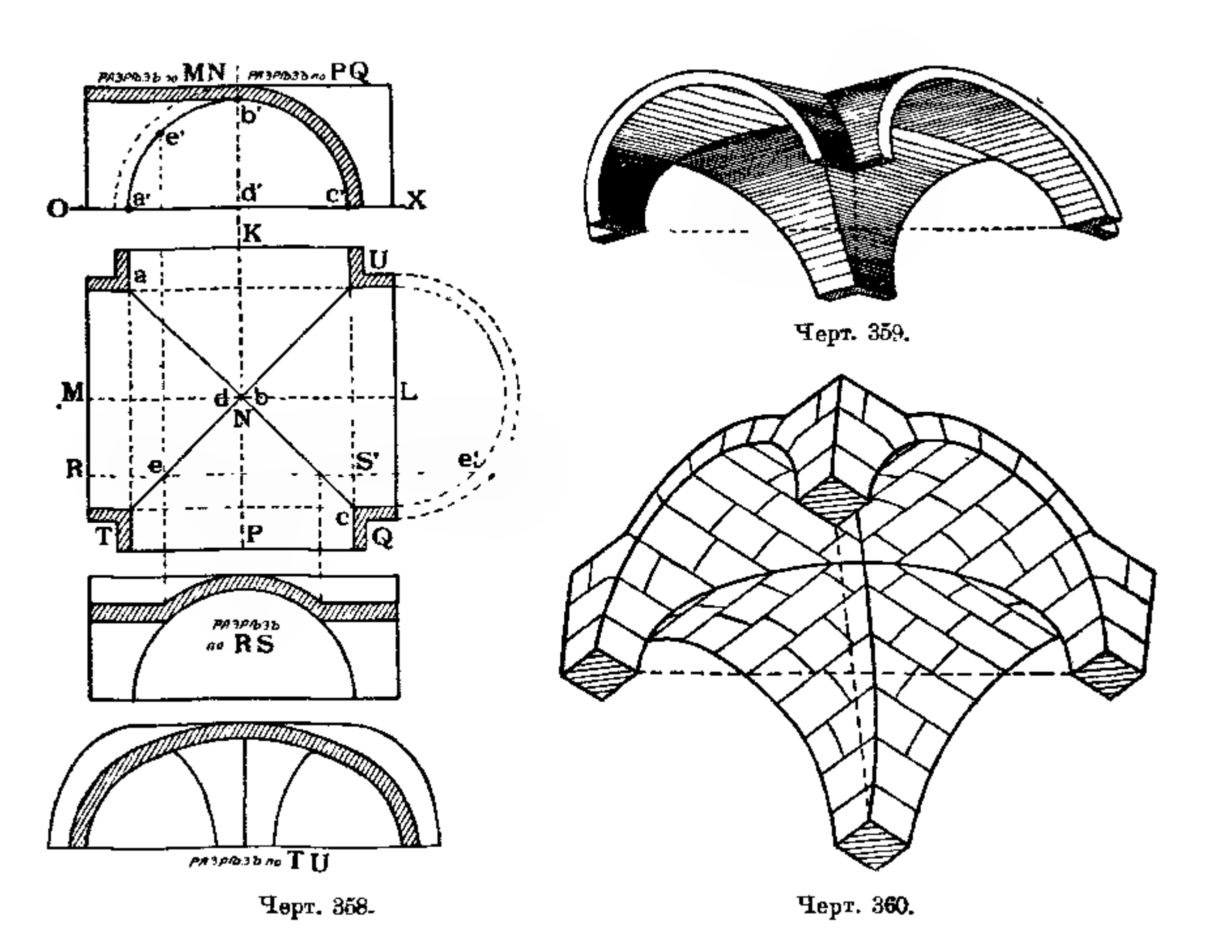
[1]) Доказательство см. К. Андреевъ „Аналитическая Геометрія" 1888 г стр 248, Н. Рынинъ „Ледорѣзы" 1901 г. стр. 61, А. Ярковскій „Замѣтка къ проектированію каменныхъ сооруженій" 1908.

[2]) Такіе своды называются *крестовыми*.

На чертежѣ показанъ рядъ разрѣзовъ свода плоскостями: *MN*, *PQ*, *RS* и *TU*.

На чертежѣ 359 изображенъ общій видъ геометрическихъ формъ свода.

На чертежѣ 360 показано изображеніе подобнаго же свода въ предположеніи, что онъ сложенъ изъ тесовыхъ камней.



Черт. 358.

Черт. 359.

Черт. 360.

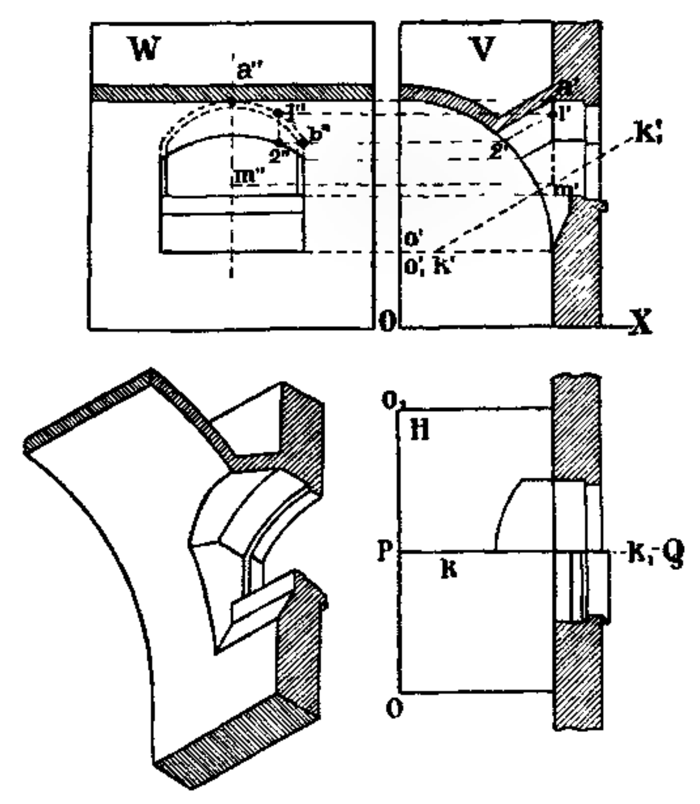
Задача № 26. Построить линію сѣченія двухъ цилиндрическихъ сводовъ: одного горизонтальнаго кругового, перекрывающаго корридоръ (черт. 361), другого—съ наклонной осью но круглаго вертикальнаго сѣченія, перекрывающаго промежутокъ между окномъ и корридоромъ.

Рѣшеніе. На *V* линіи сѣченія цилиндровъ спроектируются въ дуги круговъ—проекціи свода, перекрывающаго корридоръ.

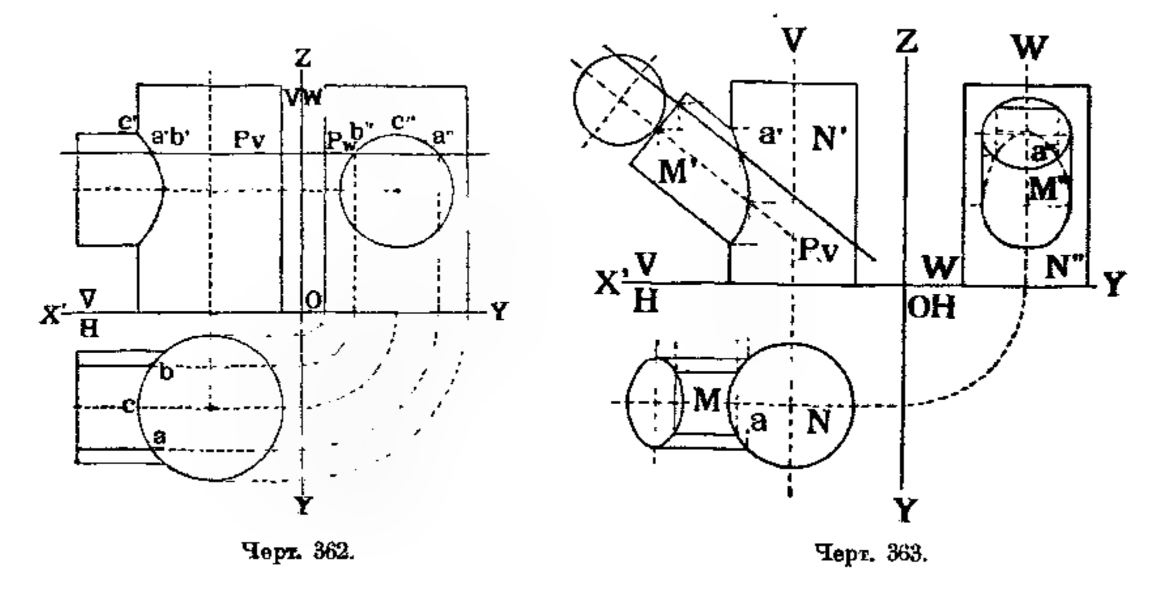
Возьмемъ какую нибудь производящую 1'2' наклоннаго цилиндра; нетрудно найти ея проекціи на *W* и на *H*. Задавшись рядомъ такихъ проекцій производящихъ на *V* и найдя проекціи ихъ на *W* и *H*, можно соединить нижніе концы производящихъ плавной кривой, которая будетъ линіей сѣченія внутреннихъ поверхностей сводовъ. Боковыя стѣнки оконнаго проема ограничены вертикальными плоскостями.

На томъ же чертежѣ показанъ общій видъ пересѣкающихся сводовъ.

На чертежѣ 362 показано въ видѣ примѣра изображеніе проекцій линіи сѣ-



Черт. 361.



Черт. 362. Черт. 363.

ченія двухъ прямыхъ круговыхъ цилиндровъ, оси которыхъ взаимно перпендикулярны и пересѣкаются.

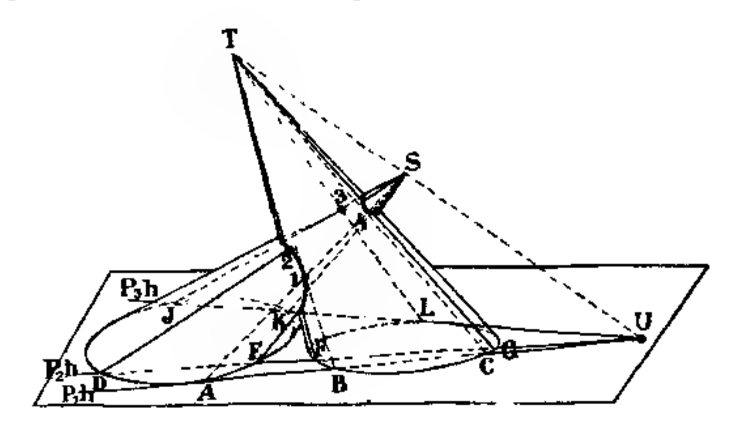
Для построенія проекцій случайныхъ точекъ *A* и *B* линіи сѣченій проведена вспомогательная плоскость *P*, параллельная *H*

На чертежѣ 363 показана линія сѣченія двухъ прямыхъ круговыхъ цилиндровъ, оси которыхъ пересѣкаются, но при этомъ не перпендикулярны другъ другу. Для построенія случайной точки *A* линіи сѣченія проведена вспомогательная плоскость *P*, перпендикулярная *V* и параллельная оси малаго цилиндра.

Примѣръ 2-й Построеніе линіи сѣченія двухъ конусовъ.

Примѣнимъ для рѣшенія этой задачи въ пространствѣ 2-й способъ (стр. 222) (черт. 364).

Соединяемъ вершины *T* и *S* конусовъ прямой линіей и проводимъ черезъ эту прямую рядъ плоскостей, пересѣкающихъ конуса по ихъ производящимъ. Пересѣченіе послѣднихъ между собою опредѣляетъ рядъ точекъ, принадлежащихъ искомымъ кривымъ.



Черт. 364.

На чертежѣ 364 показано построеніе въ пространствѣ нѣсколькихъ такихъ точекъ. Плоскость P_1 проведена черезъ линію вершинъ касательной къ конусу *S* по производящей *AS*. Въ то же время P_1 пересѣкветъ конусъ *T* по производящимъ *BT* и *CT*. Точки 1 и 4 пересѣченія *AS* съ *BT* и *CT* принадлежатъ искомой кривой. Далѣе проведена еще плоскость P_2, пересѣкающая комусъ *S* по производящимъ *DS* и *ES* и конусъ *T* по производящимъ *FT* и *GT*. Взаимное пересѣченіе этихъ производящихъ дастъ еще четыре точки линій сѣченія; на чертежѣ обозначена одна изъ этихъ точекъ — 2.

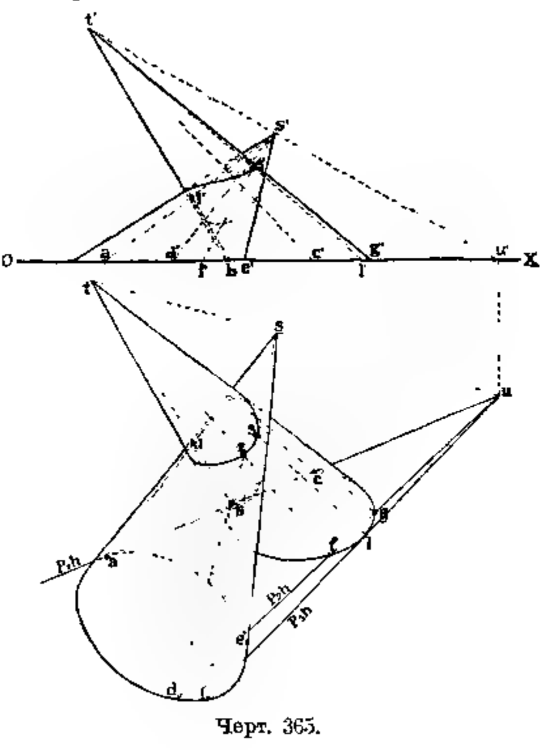
Наконецъ, на чертежѣ показана еще одна плоскость P_3, касательная къ конусу *T* по производящей *LT* и пересѣкающая конусъ *S* по производящимъ *JS* и *KS*. Пересѣченіе *LT* съ *JS* и *KS* даетъ еще двѣ точки искомой линій сѣченія.

Продолжая подобныя построенія, можно опредѣлить рядъ точекъ искомой кривой, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной линіей.

Замѣтимъ, что всѣ слѣды вспомогательныхъ плоскостей P, заключающихъ линію ST, должны проходить черезъ слѣдъ U этой линіи.

На чертежѣ 365 эта задача рѣшена въ проекціяхъ.

Оба конуса, эллиптическаго горизонтальнаго сѣченія, стоятъ на H. Линія TS ихъ вершинъ имѣетъ горизонтальный слѣдъ въ точкѣ U, черезъ которую и проведены три плоскости P_1, касательная къ конусу S, P_2, пересѣкающая оба конуса, и P_3, касательная къ конусу T. Слѣдъ P_1h будетъ касаться эллипса основанія конуса S, слѣдъ P_2h будетъ пересѣкать эллипсы основаній обоихъ конусовъ, и слѣдъ P_3h будетъ касаться эллипса основанія конуса T. Далѣе слѣдуетъ замѣтить точки пересѣченія (или касанія) слѣдовъ вспомогательныхъ плоскостей со слѣдами конусовъ, соединить полученныя точки съ соотвѣтственными вершинами и найти точки пересѣченія произаодящихъ разныхъ конусовъ; эти точки и будутъ принадлежать искомой кривой. На чертежѣ отмѣчены слѣдующія точки:



Черт. 365.

Точки.		Пересѣкающіяся производящія
1		AS и BT.
2		DS и FT.
3		IS и LT.

Продолжая подобныя построенія, можно опредѣлить проекціи еще ряда точекъ, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной кривой.

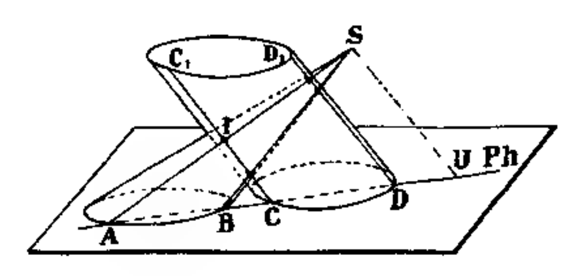
Въ частныхъ случаяхъ рѣшенія задачъ на пересѣченіе двухъ конусовъ, въ особенности, если необходимо бываетъ найти пересѣченіе профильныхъ производящихъ одного конуса съ поверхностью другого, полезно мѣнять плоскости проекцій и рѣшать задачу не въ системѣ $\frac{V}{H}$, а въ другой, въ которой производящія и линіи, бывшія ранѣе профильными, уже таковыми не являются.

Замѣтимъ, что если оба конуса будутъ описаны вокругъ одного и того же шара, то линія сѣченія ихъ будетъ плоской кривой [1]).

Примѣръ 3-й. Построеніе линій сѣченія цилиндра съ конусомъ.

Въ пространствѣ случайную точку такой линіи сѣченія можно найти слѣдующимь образомъ (черт. 366). Проводимъ черезъ вершину конуса линію SU, параллельную производящимъ цилиндра. Черезъ такую линію можно провести плоскость P, которая и цилиндръ и конусъ пересѣчетъ по прямолинейнымъ производящимъ AB, BC и CC_1 и BD_1. Пересѣченіе соотвѣтственныхъ производящихъ между собою и дастъ рядъ точекъ искомой линіи сѣченія. Напримѣръ AS пересѣкается съ CC_1 въ точкѣ 1.

Переходимъ къ рѣшенію задачи въ проекціяхъ (черт. 367).



Черт. 366.

Проводимъ черезъ вершину S конуса прямую SU, параллельную оси OO_1 цилиндра, и находимъ горизонтальный слѣдъ ея U.

Черезъ SU проводимъ случайную плоскость P и замѣчаемъ точки c и a, пересѣченія горизонтальнаго слѣда ея Ph съ горизонтальными слѣдами конуса и цилиндра. Черезъ точку C проводимъ производящую цилиндра, а черезъ точку A—производящую конуса. Точка **1** пересѣченія этихъ производящихъ принадлежитъ искомой кривой линіи.

Тотъ же слѣдъ Ph пересѣкаетъ слѣды конуса и цилиндра еще въ точкахъ c_1 и a_1, черезъ которыя можно было бы провести еще производящія конуса и цилиндра и найти, при помощи ранѣе проведенныхъ производящихъ, еще три точки искомой линіи.

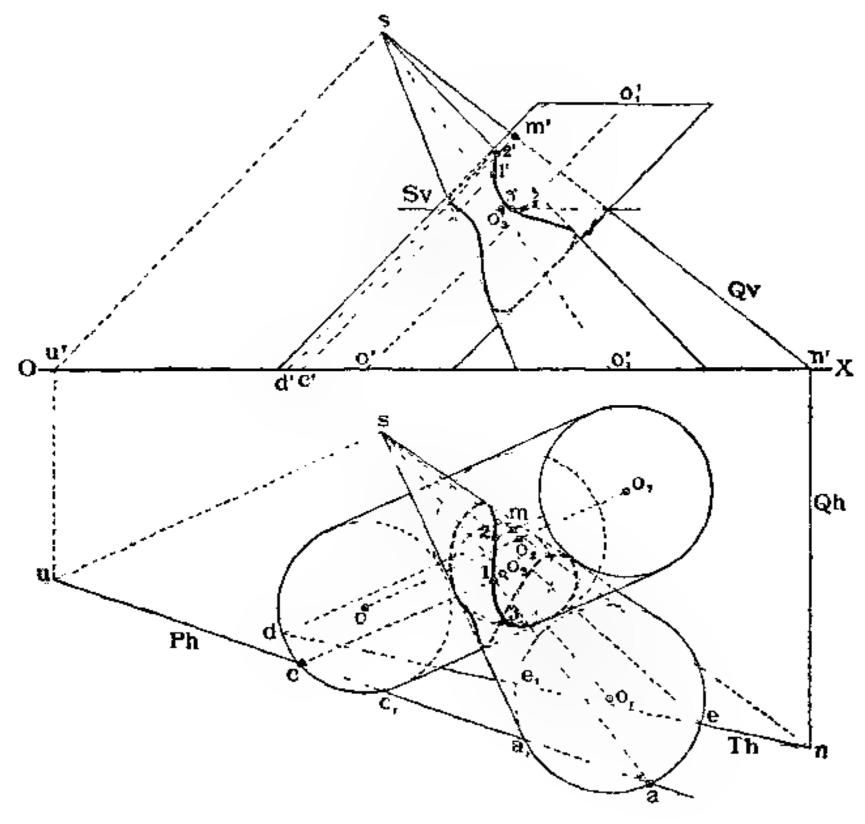
Если линія SU имѣетъ слѣдъ внѣ предѣловъ чертежа, то можно воспользоваться слѣдующимъ пріемомъ.

Проведемъ черезъ S плоскость $Q \perp V$ такъ, чтобы слѣды Qv и Qh располагались въ предѣлахъ чертежа. Затѣмъ выбираемъ на цилиндрѣ случайную производящую, проходящую, напримѣръ, черезъ точку D круга его основанія, и находимъ точку M пересѣченія этой про-

---

[1]) Доказательство можно найти въ сочиненіяхъ, указанныхъ внизу стр. 225.

изводящей съ плоскостью Q. Соединяемъ точки M и S и находимъ слѣдъ Th плоскости T, заключающей линіи DM и SM. Слѣдъ Th пройдетъ черезъ точку d и черезъ точку n, лежащую на Qh въ мѣстѣ пересѣченія его съ линіей SM. Замѣчаемъ точки e и e_1 пересѣченія Th съ слѣдомъ конуса и проводимъ производящія SE и SE_1 конуса, служащія линіями сѣченія конуса съ плоскостью T. На чертежѣ показана лишь

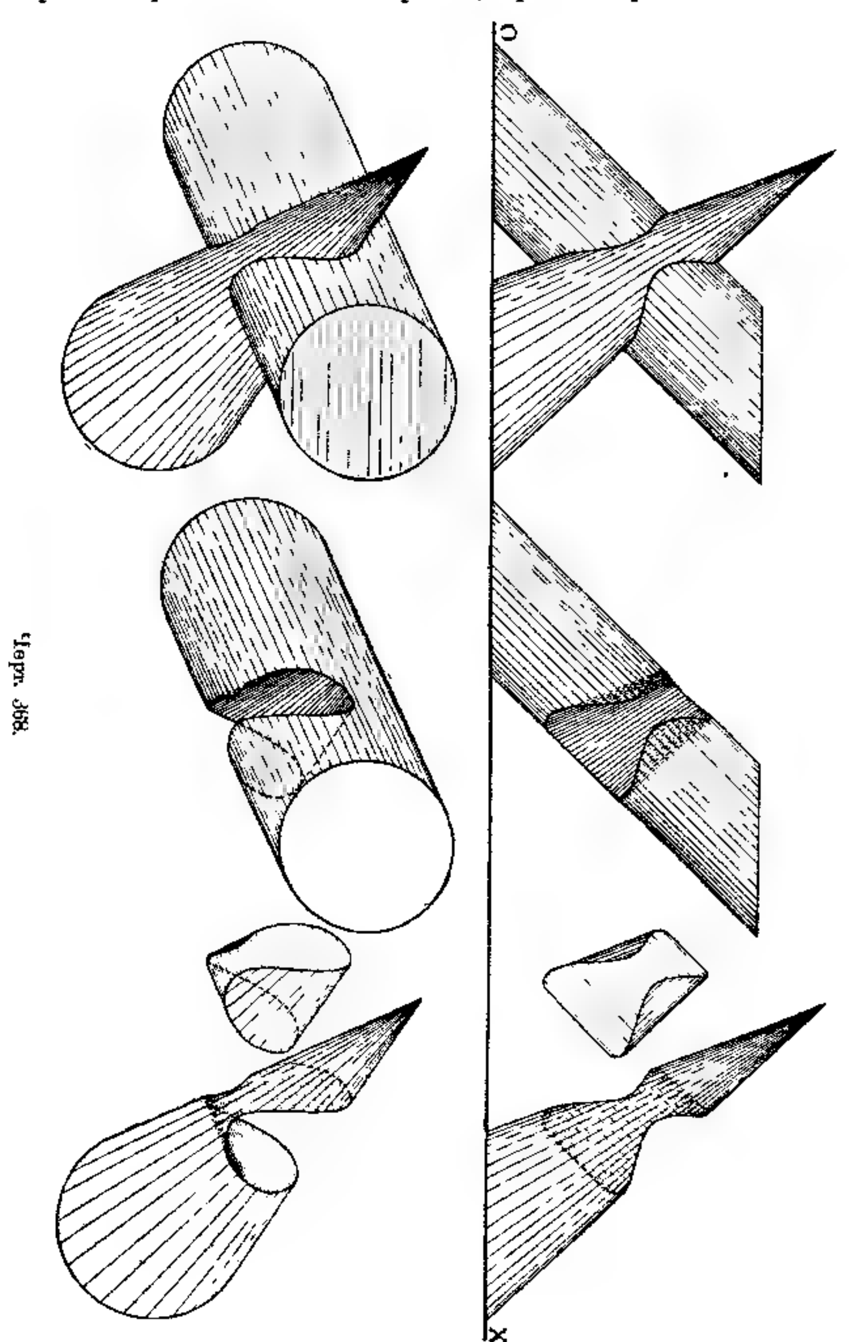


Черт. 367.

одна изъ производящихъ SE и найдена точка **2** пересѣченія ея съ производящей DM цилиндра. Точка **2** принадлежитъ искомой линіи.

Если обѣ данныхъ поверхности круглаго горизонтальнаго сѣченія, какъ это имѣетъ мѣсто въ разсматриваемомъ случаѣ, то точки искомой кривой можно опредѣлить, примѣняя 2-й изъ ранѣе упомянутыхъ способовъ (стр. 222). Проведемъ плоскость $S \parallel H$ и найдемъ круги сѣченія ея къ конусамъ (центръ круга O_3) и съ цилиндромъ (центръ круга O_2). Пересѣченіе этихъ круговъ и даетъ искомыя точки. На чертежѣ показана одна изъ такихъ точекъ **3**.

Производя рядъ подобныхъ построеній, опредѣлимъ рядъ точекъ искомой



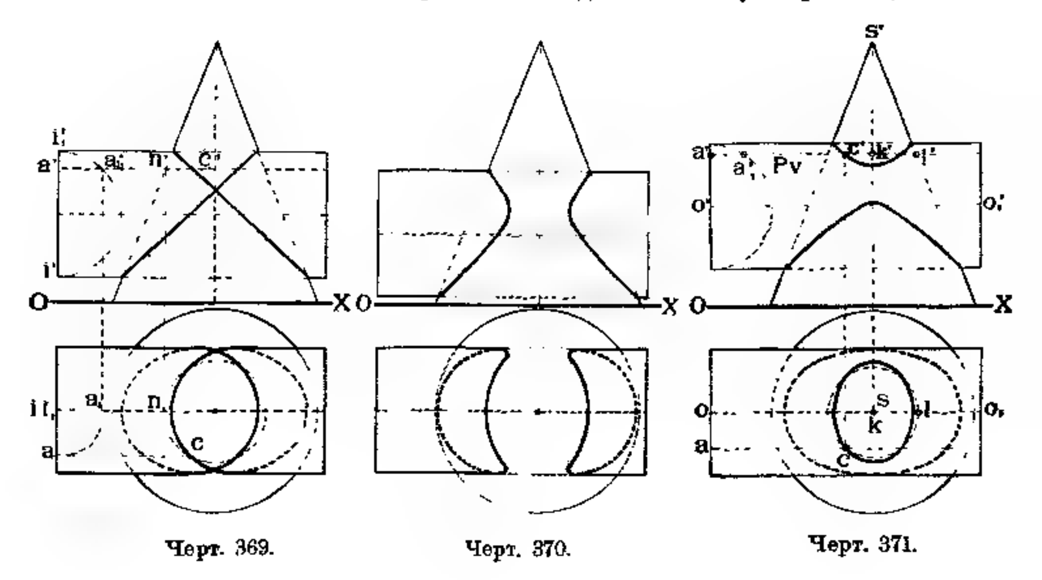
Черт. 368.

линіи сѣченія. Соединяя ихъ плавной кривой получимъ искомую кривую.

На черт. 368 показаны проекціи: 1) общаго вида пересѣкающихся поверхностей, 2) отдѣльно цилиндра, 3) отдѣльно конуса, 4) отдѣльно части общей цилиндру и конусу.

Замѣтимъ, что если цилиндръ и конусъ будутъ описаны вокругъ одного и того же шара, то линія сѣченія ихъ будетъ плоской кривой [1]).

Линія сѣченія конуса съ цилиндромъ, какъ и въ случаѣ двухъ пересѣкающихся цилиндровъ или двухъ конусовъ, можетъ состоять изъ одной кривой, какъ въ случаѣ приведенномъ на чертежахъ 367 и 368, или изъ двухъ отдѣльныхъ кривыхъ (черт. 370 и 371), или изъ двухъ кривыхъ, имѣю-



Черт. 369. Черт. 370. Черт. 371.

щихъ общую точку, или, наконецъ, изъ двухъ кривыхъ, пересѣкающихся въ двухъ точкахъ.

На чертежѣ 369 изображенъ именно этотъ послѣдній случай.

На этомъ чертежѣ показанъ между прочимъ способъ нахожденія производящихъ цилиндра, ось котораго параллельна OX. Выберемъ на прямой, представляющей проекцію на V основанія цилиндра, какую нибудь точку a'. Чтобы найти соотвѣтствующую ей горизонтальную проекцію, при условіи, чтобы сама точка A лежала на кругѣ основанія цилиндра, вращаемъ кругъ основанія вокругъ его вертикальнаго діаметра II_1 до тѣхъ поръ, пока онъ не станетъ параллельнымъ V. Тогда точка a' придетъ въ положеніе a_1'. Горизонтальная проекція ея будетъ a_1.

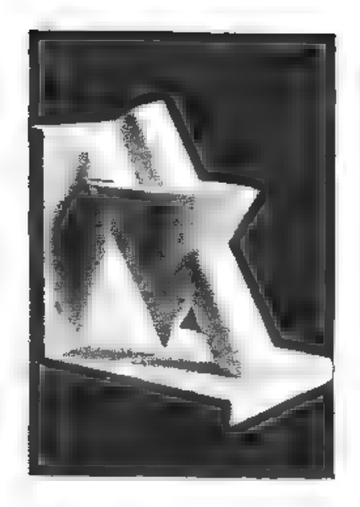
Возвращая кругъ въ прежнее положеніе, найдемъ точку a, горизонтальную проекцію точки A. Остается черезъ a и a' провести линіи, па-

[1]) Доказательство можно найти въ сочиненіяхъ, указанныхъ внизу стр. 225.

раллельныя OX, которыя и будутъ проекціями производящей цилиндра, проходящей черезъ точку A.

На черт. 372 показанъ общій видъ модели, изображающей пересѣченіе конуса съ цилиндромъ.

Задача № 27 Построить линію сѣченія двухъ сводовъ, изъ которыхъ одинъ прямой круговой цилиндрическій съ горизонтальной осью перекрываетъ корридоръ, а другой коническій, круглаго вертикальнаго сѣченія, съ наклонной осью перекрываетъ промежутокъ между окномъ и первымъ сводомъ (черт. 373).



Черт. 372.

Рѣшеніе.

Для рѣшенія задачи беремъ рядъ производящихъ конуса и находимъ точки пересѣченія ихъ съ цилиндромъ. Построенія для опредѣленія этихъ точекъ начинаемъ съ проекціи на плоскости W, на которую цилиндры, ограничивающія верхнюю и нижнюю поверхности цилиндрическаго свода, проектируются въ видѣ круговъ. Выбираемъ случайную производящую конуса, проходящую, напримѣръ, черезъ точку 1 круга сѣченія его поверхности съ внутренней поверхностью стѣны.

Продолжаемъ линію $s''1''$ до пересѣченія съ дугою круга—проекціей цилиндра на W, въ точкѣ $2''$. Находимъ точку $2'$ на линіи $s'1'$ и точку 2 на линіи $s1$

Точка **2** и будетъ принадлежать искомой кривой линіи сѣченія внутреннихъ поверхностей сводовъ.

Продолжая подобныя построенія, опредѣлимъ еще рядъ точекъ внутренней и наружной линій сѣченія сводовъ.

Боковыя стѣнки оконнаго проема ограничены плоскостями. Общій видъ пересѣченія показанъ отдѣльно на томъ же чертежѣ.

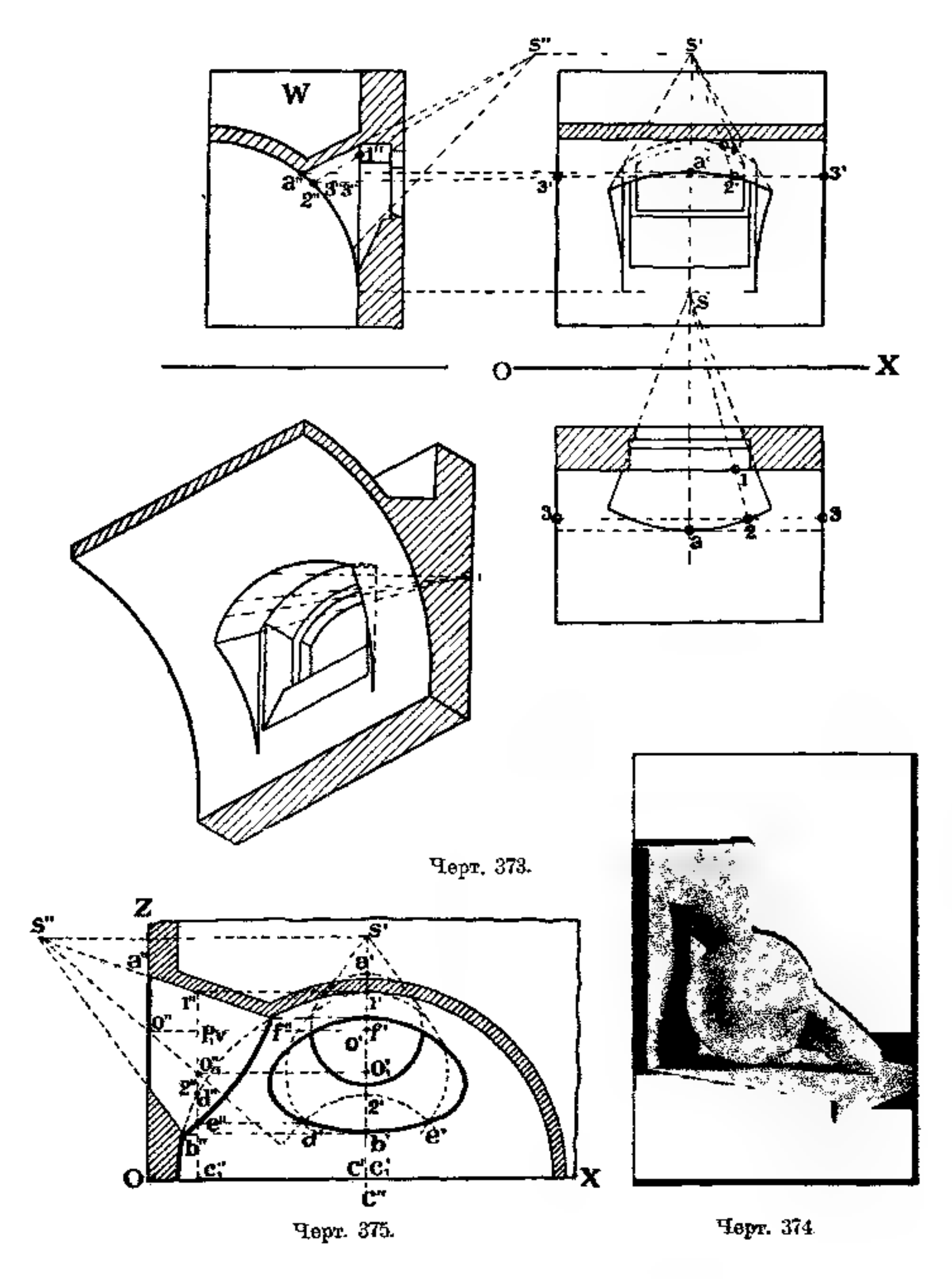
Примѣръ 4-й. Построеніе линіи сѣченія конуса или цилиндра съ шаромъ.

Для рѣшенія этой задачи при случайномъ заданіи формы конуса или цилиндра слѣдуетъ брать рядъ отдѣльныхъ производящихъ конуса или цилиндра и находить точки пересѣченія ихъ съ поверхностью шара, какъ это было уже объяснено на стр. 220. Соединяя между собой полученныя точки по лекалу, получимъ искомую кривую линію сѣченія поверхностей.

Въ частномъ случаѣ, если цилиндръ или конусъ имѣютъ въ сѣченіяхъ круги, проектирующіеся на одну изъ плоскостей проекцій безъ искаженія, рѣшеніе задачи упрощается.

На черт. 374 показанъ общій видъ сѣченія цилиндра съ шаромъ.

Задача № 28 Построить линію сѣченія шарового свода, перекрывающаго комнату, круглую въ планѣ, съ коническими сводами круглаго вертикальнаго сѣченія, пе-



Черт. 373.

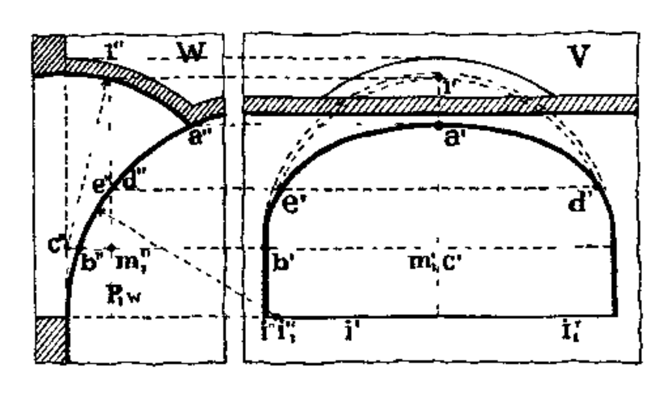
Черт. 375.

Черт. 374

рекрывающими промежутки между шаровымъ сводомъ и окнами, расположенными въ цилиндрической стѣнѣ комнаты (черт. 375).

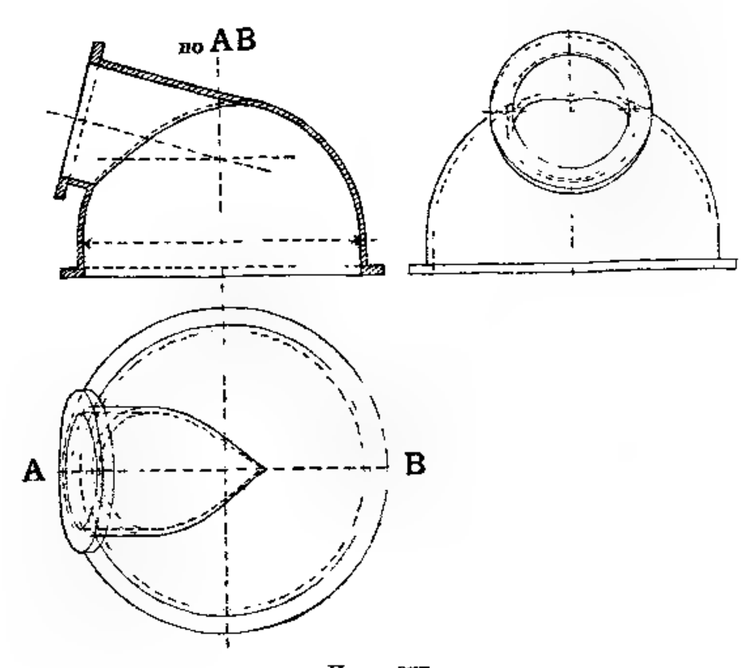
Рѣшеніе.

На чертежѣ изображенъ вертикальный разрѣзъ комнаты плоскостью, параллельной *V*. Ввиду одинаковаго расположенія оконъ относительно центра *C* шарового свода, сѣченіе лѣваго окна можетъ служить какъ бы проекціей средняго окна на *W*.



Черт. 376.

Для построенія случайной точки линіи сѣченія внутреннихъ поверхностей коническаго и шарового сводовъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ.



Черт. 377.

Проводимъ профильную плоскость P_1 (слѣдъ ея P_1v), которая конусъ пересѣчетъ по кругу радіуса $o_1''1$ съ центромъ въ точкѣ o_1'', o_1', а шаръ — также по

кругу радіуса $c_1''2''$ съ центромъ въ точкѣ $c_1''c_1'$. Строимъ проекціи этихъ круговъ и замѣчаемъ точки D и E ихъ пересѣченія.

Продолжая подобныя построенія, мы можемъ найти еще рядъ точекъ, которыя и опредѣлятъ искомую линію.

Задача № 29. Построить линію сѣченія цилиндрическаго свода, перекрывающаго корридоръ, съ шаровымъ сводомъ, перекрывающимъ промежутокъ между окнами и цилиндрическимъ сводомъ (черт 376).

Рѣшеніе.

На чертежѣ оба свода изображены въ проекціяхъ на V и W. Для построенія случайной точки искомой линіи сѣченія проводимъ плоскость P_1 параллельно V (слѣдъ P_1v).

Эта плоскость пересѣкаетъ шаръ по кругу радіуса $m_1''1''$ съ центромъ въ точкѣ $m_1''m_1'$, а цилиндръ -по производящей ED ($e'd'$, $e''d''$). Пересѣченіе упомянутыхъ круга и производящей опредѣляетъ точки E и D, принадлежащія искомой линіи сѣченія.

Продолжая подобныя построенія, можно найти еще рядъ точекъ, которыя и опредѣлятъ искомую линію.

На чертежѣ 377 показанъ въ проекціяхъ видъ кривой линіи сѣченія цилиндрической трубы съ шаровымъ кожухомъ тюрбины. Построенія для провѣрки правильности показанной кривой линіи предлагаемъ воспроизвести читателю.

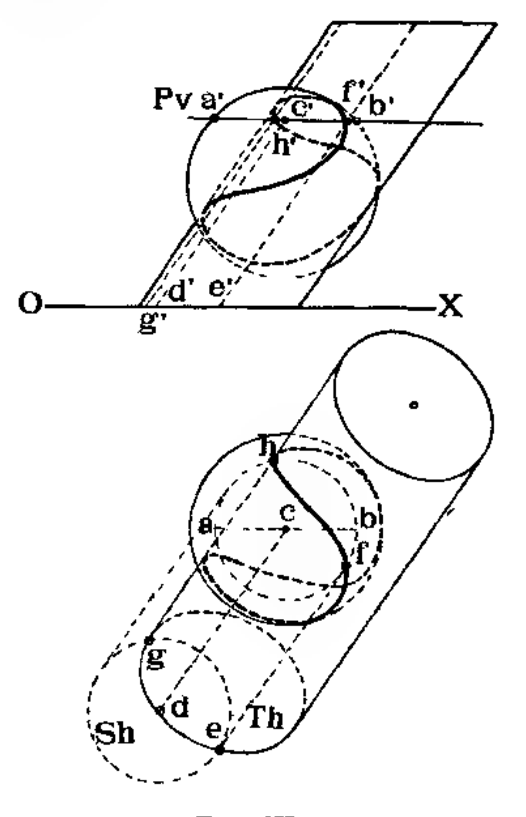
Разсмотримъ примѣненіе 3-го изъ вышеописанныхъ способовъ (стр. 222) нахожденія точекъ линіи пересѣченія двухъ поверхностей при помощи вспомогательныхъ кривыхъ поверхностей, пересѣкающихъ данныя поверхности.

Примѣръ 5-й. На чертежѣ 378 изображены: шаръ и эллиптическій цилиндръ. Требуется построить линію ихъ сѣченія

Искомую линію строимъ по точкамъ.

Покажемъ, какъ найти случайную точку этой линіи.

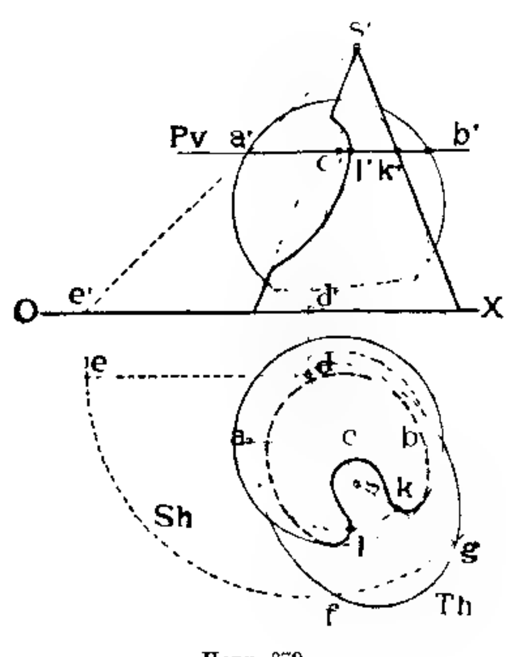
Разсѣчемъ оба тѣла горизонтальною плоскостью P. Эта плоскость въ сѣченіи съ шаромъ даетъ кругъ радіуса $c'a'$ съ центромъ въ c', c, а въ сѣченіи съ цилидромъ даетъ эллипсъ, одинаковый съ эллипсомъ основанія цилиндра.



Черт. 378.

Можно было бы, конечно, построить проекціи упомянутыхъ круга и эллипса, лежащихъ въ P, и найти точки ихъ пересѣченія, каковыя и были бы искомыми. Однако построеніе эллипса довольно затруднительно.

Поэтому лучше поступить такъ: проводимъ черезъ найденный кругъ цилиндръ, ось котораго CD была бы параллельна производящимъ эллиптическаго цилиндра, и находимъ круговой слѣдъ Sh новаго цилиндра. Новый цилиндръ и данный эллиптическій пересѣкаются по прямымъ линіямъ, производящимъ, проходящимъ черезъ точки G и E пересѣченія слѣдовъ Sh и Th цилиндровъ.



Черт. 379.

Проводимъ эти производящія и замѣчаемъ точки H и F пересѣченія ихъ съ кругомъ ACB. Эти точки и будутъ искомыми.

Проведя еще рядъ плоскостей, параллельныхъ H, и построивъ рядъ новыхъ вспомогательныхъ цилиндровъ, можно найти еще рядъ точекъ искомой линіи сѣченія, каковыя затѣмъ слѣдуетъ соединить по лекалу плавной кривой.

Примѣръ 6-й. Иногда, вмѣсто вспомогательныхъ цилиндрическихъ поверхностей выгоднѣе проводить коническія поверхности, какъ это показано на слѣдующемъ примѣрѣ (черт. 379).

Даны. шаръ и эллиптическій конусъ. Требуется построить линію ихъ пересѣченія.

Для построенія случайной точки искомой линіи поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Разсѣкаемъ обѣ поверхности плоскостью $P \parallel H$. Въ сѣченіи съ конусомъ получается эллипсъ, а въ сѣченіи съ шаромъ—кругъ AB съ центромъ въ C. Чтобы не строить упомянутаго эллипса, проведемъ черезъ найденный кругъ и вершину S коническую поверхность. Ось SC послѣдней пересѣкаетъ H въ точкѣ D, а слѣдомъ поверхности будетъ кругъ Sh радіуса $d'e' = de$. Замѣчаемъ точки F и G пересѣченія круга Sh со слѣдомъ Th эллиптическаго конуса и соединяемъ эти точки съ вершиною S.

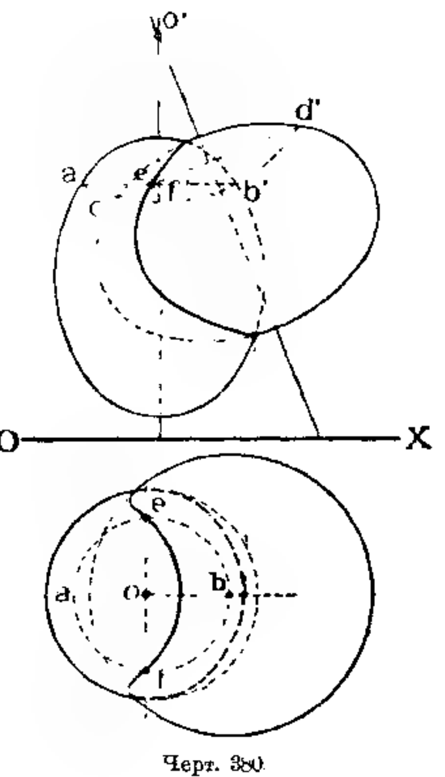
Линіи SF и SG являются прямыми линіями сѣченіями двухъ конусовъ—даннаго эллиптическаго и вспомогательнаго, причемъ оба конуса имѣють общую вершину G.

Точки K и L пересѣченія производящихъ SF и SG кругомъ AB и будутъ принадлежать искомой линіи сѣченія.

Проводя рядъ плоскостей, параллельныхъ P и строя рядъ вспомогательныхъ конусовъ, мы получимъ еще рядъ точекъ искомой линіи, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной кривой.

Примѣръ 7-й. Построить линію сѣченія двухъ тѣлъ вращенія—эллипсоидовъ, оси каждыхъ параллельны V и пересѣкаются въ точкѣ O (черт. 380).

Для построенія случайной точки линіи сѣченія проводимъ вспомогательную поверхность шара, съ центромъ въ O. Этотъ шаръ пересѣчеть данныя тѣла вращенія (эллипсоиды) по кругамъ, которые на V спроектируются въ прямыя линіи $a'b'$ и $c\,d'$.



Черт. 380

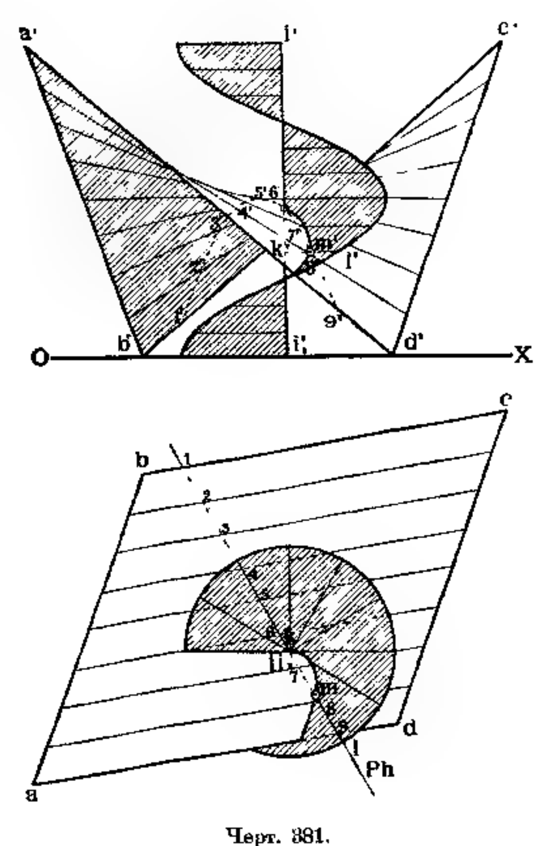
Въ точкѣ пересѣченія этихъ линій сливаются проекціи e' и f' двухъ точекъ искомой линіи. Строимъ кругъ $a\,b$, горизонтальную проекцію круга AB, и замѣчаемъ на немъ точки e и f, проекціи точекъ E и F, которыя и принадлежатъ искомой линіи сѣченія. Продолжая подобныя построенія, можно найти еще рядъ точекъ искомой линіи, каковыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной кривой.

Примѣръ 8-й. На чертежѣ 381 даны проекціи: 1) косой плоскости, опредѣляемой двумя парами ея производящихъ AB, CB и BC, AD, причемъ плоскости параллелизма производящихъ перпендикулярны къ H, и 2) винтовой коноидъ съ направляющими — цилиндрической винтовой линіей и ея осью $\perp H$ и плоскостью параллелизма $\parallel H$.

Требуется построить линію пересѣченія этихъ поверхностей.

Покажемъ, какъ строится случайная точка искомой линіи, для чего примѣнимъ 1-й изъ упомянутыхъ способовъ (стр. 222).

Выбираемъ на одной изъ поверхностей, напримѣръ, на коноидѣ, случайную производящую KL и проводимъ черезъ нее плоскость $P \perp H$. Замѣчаемъ точки **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, пересѣченія P съ производящими косой плоскости Кривая линія **1**, **2**...**8**, **9** будетъ служить линіей сѣченія плоскости P съ косой плоскостью. Точка M пересѣченія про-



Черт. 381.

изводящей KL коноида съ найденной линіей и будетъ искомой. Продолжая подобныя построенія, можно найти еще рядъ точекъ искомой линіи, которыя затѣмъ остается соединить плавной кривой.

e) *Пересѣченіе кривой поверхности съ кривой линіей.*

Общій способъ рѣшенія въ пространствѣ задачи на нахожденіе точекъ пересѣченія кривой поверхности съ кривою линіею двоякой кривизны или плоскою, заключается въ слѣдующемъ:

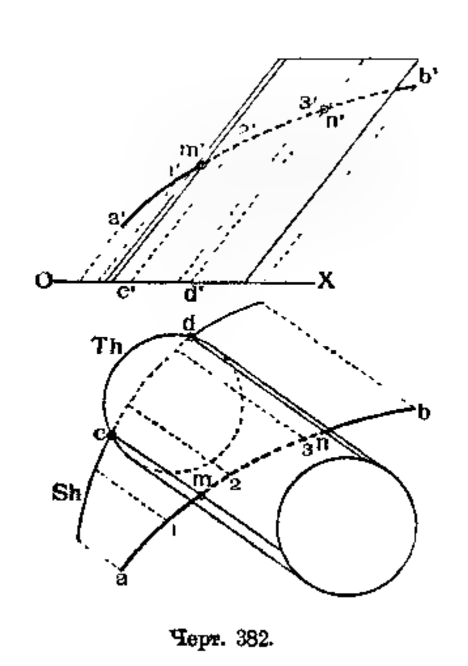
Проводимъ черезъ данную кривую линію вспомогательную поверхность. Находимъ линію сѣченія этой поверхности съ данной. Точки пересѣченія найденной линіи съ данной линіей и будутъ искомыми.

Вспомогательную поверхность слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы она въ пересѣченіи съ данной поверхностью давала, по возможности, простыя линіи—прямую или кругъ, или, чтобы построеніе таковой линіи сѣченія было, по возможности, простымъ.

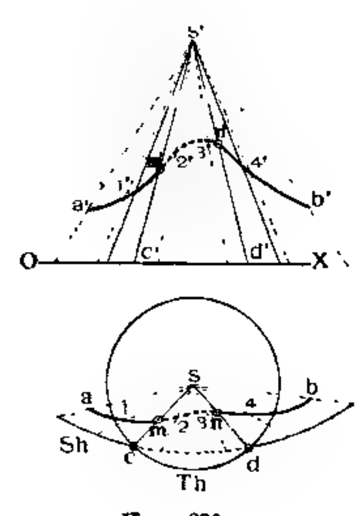
Разсмотримъ примѣненіе этого способа на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Найти точки пересѣченія кривой линіи AB съ поверхностью цилиндра (черт. 382).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ кривую AB вспомогательную цилиндрическую поверхность, производящія которой были бы параллельны производящимъ даннаго цилиндра. Находимъ слѣдъ Sh этого вспомогательнаго цилиндра.



Черт. 382.



Черт. 383.

Обѣ цилиндрическія поверхности пересѣкутся по прямымъ линіямъ проходящимъ черезъ точки C и B пересѣченія слѣдовъ Sh и Th этихъ поверхностей и параллельнымъ производящимъ цилиндровъ. Точки M и N пересѣченія найденныхъ производящихъ CM и BN съ кривою AB и будутъ искомыми.

Примѣръ 2-й. Найти точки пересѣченія кривой линіи AB съ поверхностью конуса (черт. 383).

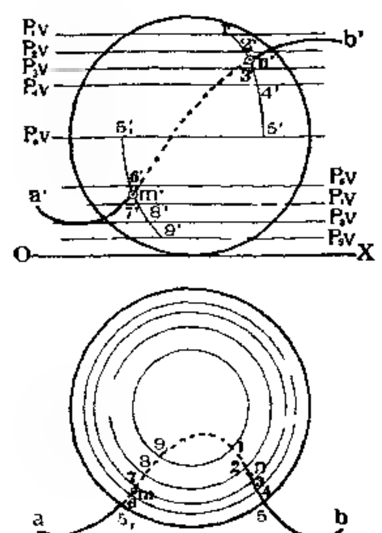
Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ вершину S даннаго конуса и черезъ рядъ точекъ кривой AB прямыя линіи, образующія вспомогательную коническую поверхность, которая, очевидно, пересѣкаетъ данную поверхность по прямымъ линіямъ.

Для нахожденія послѣднихъ строимъ слѣдъ Sh вспомогательной по-

верхности и замѣчаемъ точки C и D его пересѣченія съ Th, слѣдомъ даннаго конуса.

Линіи SC и SD будутъ производящими сѣченія данной и вспомогательной коническихъ поверхностей.

Точки же M и N пересѣченія линіи AB съ найденными производящими SC и SD будутъ искомыми.



Черт. 384.

Примѣръ 3-й. Найти точки пересѣченія кривой AB съ поверхностью шара (черт. 384).

Для рѣшенія задачи заключаемъ кривую AB въ цилиндрическую поверхность S, перпендикулярную H. Горизонтальный слѣдъ Sh этой поверхности сольется съ горизонтальной проекціей ab кривой линіи.

Строимъ теперь кривыя линіи сѣченія поверхности шара и цилиндра S. Для этого разсѣкаемъ обѣ поверхности рядомъ горизонтальныхъ плоскостей P_1, P_2, P_3 и т. д.

Каждая такая плоскость пересѣкаетъ шаръ по кругу а цилиндръ S по кривой, при чемъ на H кругъ проектируется безъ искаженія въ кругъ же, а кривая проектируется безъ искаженія въ кривую ab. Замѣчаемъ точку пересѣченія каждой пары такихъ линій, напримѣръ, точку **1** для плоскости P_1, точку **2** для плоскости P_2 и т. д.

Соединяя эти точки, получимъ кривыя **1—5** и **5_1—9** сѣченія шара съ цилиндромъ S. Искомыя точки опредѣляются въ мѣстахъ M и N пересѣченія найденныхъ кривыхъ линій съ данною кривой линіей AB.

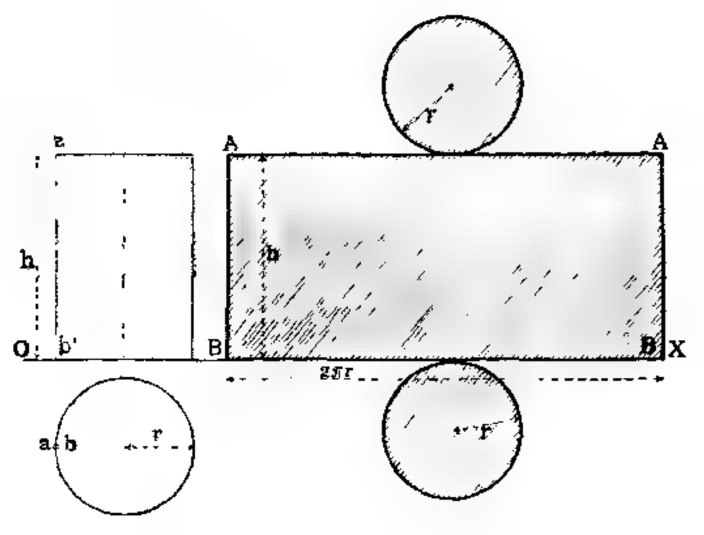
---

§ 20. Развертки кривыхъ поверхностей.

Ранѣе (стр. 170) было приведено подраздѣленіе различныхъ кривыхъ поверхностей на два класса: поверхности развертываемыя и поверхности неразвертываемыя, причемъ было объяснено, что развертываться на плоскость могутъ только тѣ поверхности, у которыхъ послѣдовательныя прямолинейныя производящія или параллельны другъ другу (поверхности цилиндрическія) или пересѣкаютъ другъ друга (поверхности коническія, развертываемые геликоиды и поверхности одинаковаго ската).

Если же прямолинейныя производящія поверхности не параллельны и взаимно не пересѣкаются, или если у поверхности нѣтъ прямолинейныхъ производящихъ, а имѣются лишь криволинейныя, то такая поверхность не можетъ быть геометрически точно развернута на плоскость. Однако, въ случаѣ необходимости все же построить развертку такой поверхности, послѣднюю строятъ приближенно, именно, замѣняютъ данную неразверзаемую поверхность вписанной въ нее другою, которая можетъ быть развернута.

Въ качествѣ такихъ вспомогательныхъ поверхностей принимаютъ либо цилиндры, либо конуса, либо многогранники.



Черт. 385.

Развертками поверхностей пользуются на практикѣ для изготовленія моделей разныхъ сооруженій, формъ для металлическихъ отливокъ, фасонныхъ листовъ въ кровельномъ и въ котельномъ дѣлѣ и т. п. Разсмотримъ способы построенія развертокъ поверхностей на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Построеніе развертки поверхности прямого кругового цилиндра.

На черт. 385 слѣва показаны проекціи прямого кругового цилиндра, высотою h и радіуса r, стоящаго на H. Предположимъ, что поверхность цилиндра разрѣзана по производящей AB и по окружностямъ основаній. Развернемъ поверхность цилиндра въ плоскость и совмѣстимъ ее съ V. Тогда боковая поверхность цилиндра изобразится въ видѣ прямоугольника высотою h и длиною $2\pi r$, гдѣ r — радіусъ основанія цилиндра.

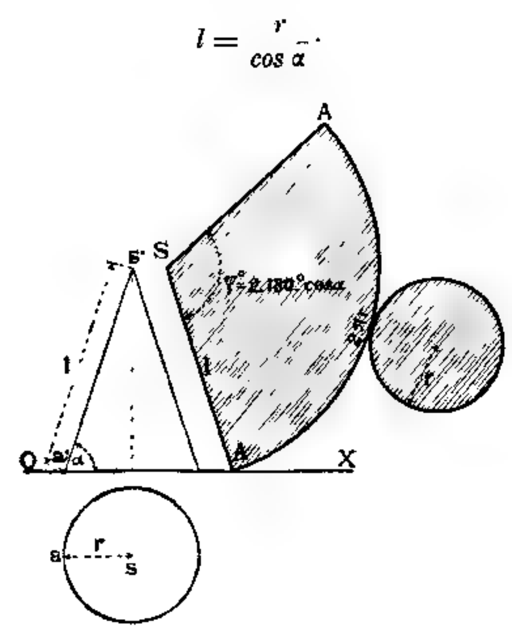
Основанія же цилиндра изобразятся въ видѣ двухъ круговъ r.

Примѣръ 2-й. Построеніе развертки поверхности прямого кругового конуса.

На черт. 386 слѣва показаны проекціи прямого кругового конуса, радіусъ основанія котораго r, а уголъ наклона производящихъ къ H равенъ α.

Разрѣжемъ конусъ по какой нибудь производящей SA и по окружности основанія и совмѣстимъ развертку поверхности съ V; нетрудно видѣть, что развертка боковой поверхности конуса изобразится въ видѣ сектора круга, радіусъ котораго SA равенъ длинѣ l производящей конуса, которая въ свою очередь равна:

$$l = \frac{r}{\cos\alpha}.$$



Черт. 386.

Длина дуги AA сектора равна длинѣ окружности круга основанія конуса, т. е.:

$$AA = 2\pi r.$$

Центральный уголъ φ сектора опредѣляется изъ слѣдующихъ равенствъ:

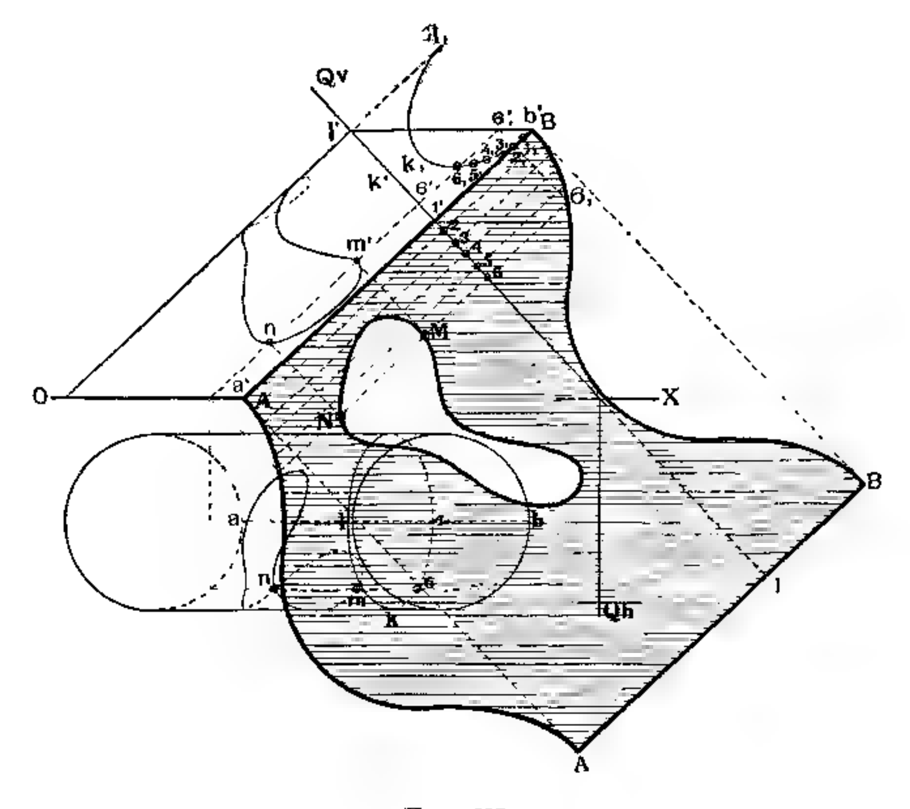
$$2\pi r = l \cdot \varphi;\ \varphi = \frac{2\pi r}{l} = \frac{2\pi r \cdot \cos\alpha}{r} = 2\pi\cos\alpha = 2.180^\circ \cdot \cos\alpha.$$

Основаніе конуса на разверткѣ изобразится кругомъ радіуса r.

Примѣръ 3-й. Построеніе развертки поверхности случайнаго цилиндра.

На черт. 387 изображенъ наклонный эллиптическій цилиндръ, при-

чемъ ось его расположена параллельно V, благодаря чему всѣ производящія цилиндра проектируются на V безъ искаженія. Если бы ось цилиндра была не параллельной плоскости проекцій, то предварительно цилиндръ слѣдуетъ привести въ такое положеніе, чтобы она расположи-



Черт. 387.

лась параллельно H или V, пользуясь методами вращенія или перемѣны плоскостей проекцій.

Проведемъ плоскость Q, перпендикулярную къ оси цилиндра, и построимъ линію (эллипсъ) $LK1$ сѣченія Q съ поверхностью цилиндра. Совмѣщаемъ Q съ V, вращая Q вокругъ Qv, и строимъ совмѣщенное положеніе линіи $LK1$. На чертежѣ, ввиду симметричности этой линіи, показана лишь половина ея $l_1k_11_1$. Далѣе разрѣзвемъ поверхность цилиндра по производящей AB и совмѣщаемъ развертку его съ V, начиная ее отъ линіи $a'b'$ (AB).

Тогда упомянутая выше линія $LK1$ сѣченія плоскости Q съ цилиндромъ превратится на разверткѣ въ прямую $11'$, длина которой равняется выпрямленной дугѣ всего эллипса $LK1$.

Для того, чтобы спрямить дугу эллипса $LK1$, половина котораго изображена въ видѣ дуги $l_1k_11_1$, дѣлимъ послѣднюю линію точками 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1 и т. д., на рядъ равныхъ частей, которыя принимаемъ за прямолинейныя, а по линіи $1'1$ откладываемъ отрѣзки $1'2 = 1_12_1$, $23 = 2_13_1$, $34 = 3_14_1$ и т. д. Черезъ точки $2, 3, 4$... проводимъ линіи параллельныя $a'b'$ и откладываемъ на нихъ въ обѣ стороны отъ линіи $1'1$ отрѣзки, равные длинамъ отрѣзковъ производящихъ между сѣченіемъ $LK1$ и основаніями цилиндра. Напримѣръ, $66_1 = 6'6_1'$ и т. д. Полученные концы производящихъ на разверткѣ соединяемъ плавными кривыми BB и AA. Если на цилиндрѣ начерчена какая нибудь кривая линія, и требуется показать ее на разверткѣ, то можно поступить слѣдующимъ образомъ: замѣчаемъ точки пересѣченія ряда производящихъ цилиндра съ этой кривой линіей, находимъ эти производящія на разверткѣ и откладываемъ отъ линіи $1'1$ на этихъ производящихъ отрѣзки, равные удаленію точекъ кривой линіи отъ сѣченія $LK1$.

Напримѣръ, на чертежѣ показано построеніе на разверткѣ точекъ N и M кривой линіи, лежащихъ на производящей 66_1. Изъ разсмотрѣннаго примѣра видно, что для развертки цилиндръ какъ бы замѣненъ вписанной въ него многогранной призмой.

Примѣръ 4-й. Построеніе развертки поверхности случайнаго конуса.

На чертежѣ 388 показаны проекціи случайнаго конуса съ вершиною S.

Разрѣжемъ поверхность его по производящей SA и совмѣстимъ развертку поверхности съ V. Для построенія развертки замѣнимъ поверхность конуса вписанной въ послѣднюю пирамидой, основаніемъ которой будетъ многоугольникъ $A2345$......, а ребрами будутъ служить производящія конуса.

При такихъ условіяхъ развертка поверхности конуса сводится къ построенію развертки пирамиды, что было уже ранѣе объяснено (стр. 120). Истинныя длины производящихъ конуса опредѣляемъ при помощи вращенія ихъ вокругъ вертикальной оси, проходящей черезъ вершину S до положенія параллельнаго V.

Напримѣръ, истинная длина производящей sa, sa' будетъ $s'a_1'$.

Полная развертка всей поверхности конуса составляется изъ ряда развертокъ треугольныхъ граней вписанной въ него пирамиды.

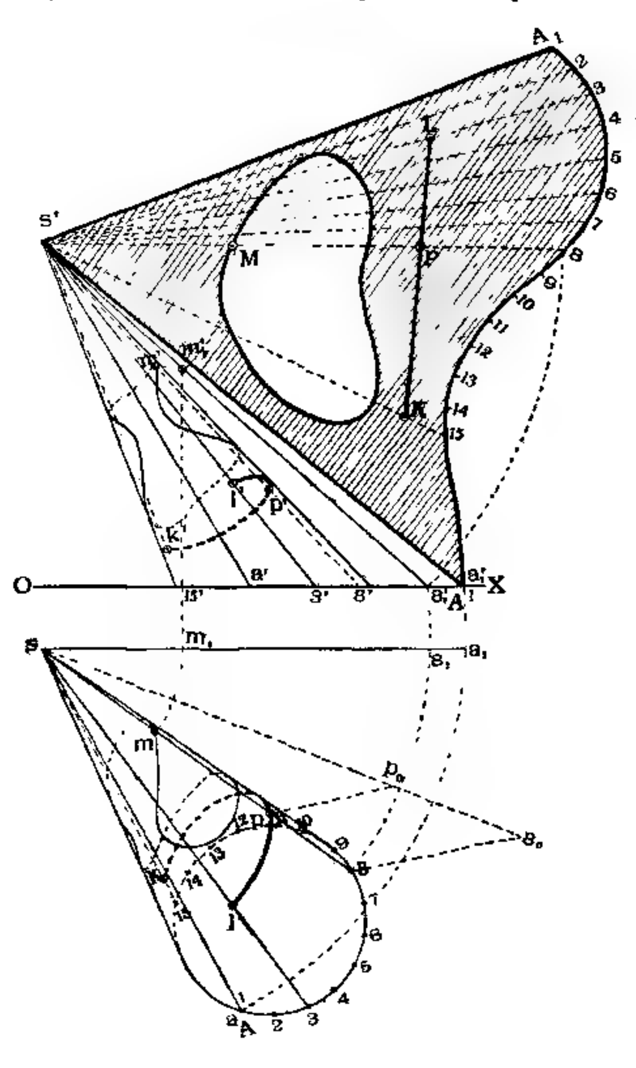
Напримѣръ, линіи $s'1$ и $s'2$ на разверткѣ равны истиннымъ длинамъ производящихъ $S1$ и $S2$ конуса, а сторона 12 на разверткѣ равна хордѣ 12 дуги основанія конуса и т. д.

Если требуется на разверткѣ конуса нанести какую нибудь линію, начерченную на поверхности конуса, то таковая линія строится по точкамъ.

Покажемъ, какъ перенести на развертку какую нибудь точку m', m, заданную на поверхности конуса.

Проводимъ черезъ M производящую $S8$. Находимъ эту производящую на разверткѣ и сносимъ точку M на эту производящую.

Иногда требуется на поверхности конуса, заданнаго въ проекціяхъ, провести между двумя точками линію кратчайшаго разстоянія, или такъ



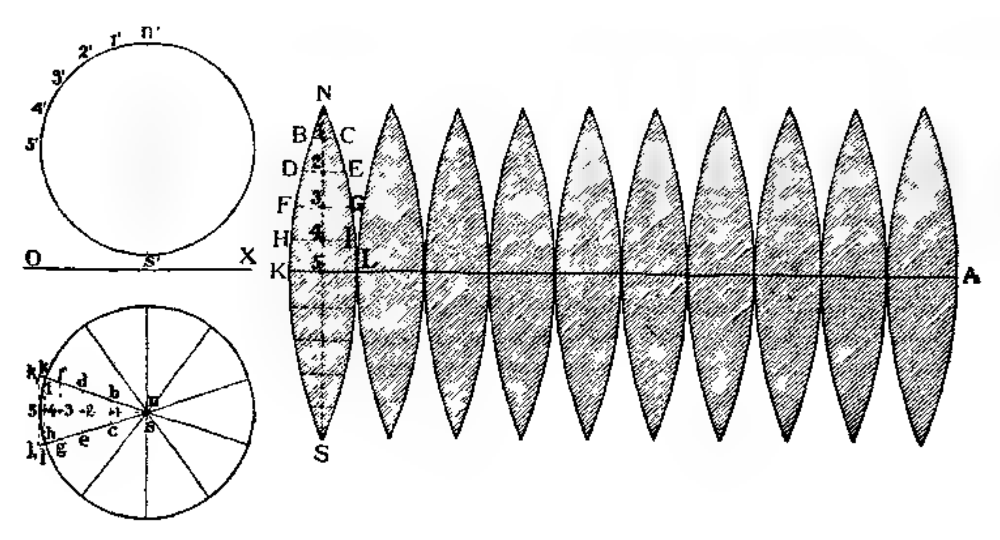
Черт 388.

называемую *геодезическую линію*. Такая линія на разверткѣ поверхности должна преобразоваться въ прямую линію. На чертежѣ 388 такая линія и проведена между точками K и L на поверхности конуса.

Для рѣшенія этой задачи сначала находимъ точки K и L на разверткѣ и на разверткѣ же проводимъ прямую линію KL. Далѣе замѣчаемь точки пересѣченія KL съ производящими, проведенными на разверткѣ, и переносимъ эти точки на соотвѣтственныя производящія конуса.

На чертежѣ показано построеніе случайной точки P геодезической линіи.

Въ планѣ изъ точки s проведена случайная линія $s8_0$, на которой отложенъ отрѣзокъ $s8_0$, равный длинѣ $s'8$ производящей на разверткѣ. Далѣе на той же прямой $s8_0$ нанесена точка p_0 въ разстояніи отъ s равномъ $s'P$ (съ развертки). Соединяемъ 8_0 съ 8 и проводимъ $p_0p \parallel 8_08$ до пересѣченія съ $s8$. Точка p и будетъ горизонтальной проекціей искомой точки P, вертикальная же проекція p' будетъ лежать на $s'8'$.



Черт. 389

Примѣръ 5-й. Построеніе приближенной развертки шара.

Такъ какъ шаровая поверхность принадлежитъ къ числу неразверзаемыхъ, то развертку ея можно построить лишь приближенно, замѣняя поверхность шара вписанными въ нее или описанными вокругъ нея, цилиндрическими, или коническими, или многогранными поверхностями.

На чертежѣ 389 показано построеніе развертки ряда цилиндрическихъ поверхностей, описанныхъ вокругъ шара. Для построенія развертки шара поступаемъ слѣдующимъ образомъ: проводимъ черезъ ось NS шара рядъ меридіальныхъ плоскостей подъ одинаковыми углами другъ къ другу. Дуги соотвѣтствующихъ меридіановъ разобьютъ поверхность шара на рядъ частей, которыя мы замѣняемъ цилиндрическими поверхностями. При этомъ отрѣзокъ kl экватора между смежными меридіанами

замѣняется отрѣзкомъ линіи k_1l_1, касательной къ экватору въ точкѣ **5** и заключенной между продолженными радіусами nk и nl. Оси цилиндровъ будутъ проходить черезъ центръ шара и будутъ параллельны такимъ касательнымъ. Напримѣръ, для упомянутаго вырѣзка ось цилиндра располагается параллельно касательной k_1l_1.

Покажемъ, какъ построить развертку одного изъ вырѣзковъ шара, напримѣръ $NKSLN$. Развертки остальныхъ вырѣзковъ будутъ одинаковы съ первымъ.

Пусть взятый вырѣзокъ дѣлится меридіаномъ $N5S$, параллельнымъ V, на двѣ симметричныя части.

Дѣлимъ дугу $n'5's'$ на равныя части $n'1'$ $1'2' - 2'3'$ и т. д. и проводимъ черезъ полученныя точки производящія цилиндра, замѣняющаго шаровой вырѣзокъ. Отрѣзки производящихъ этого цилиндра изобразятся въ горизонтальной проекціи безъ искаженія длинами $c1b$, $e2d$ и т. д.

Далѣе, проводимъ прямую линію KA, равную выпрямленному периметру многоугольника, описаннаго вокругъ экватора, и откладываемъ на ней длины сторонъ этого многоугольника. Напримѣръ $KL = k_1l_1$ и т. д.

Дѣлимъ KL пополамъ точкой 5, проводимъ изъ 5 линію $\perp$ къ KL и откладываемъ на ней отрѣзки $N5$ и $5S$, равные длинамъ дугъ $5'n'$ и $5's'$. Дѣлимъ линію NS точками 1, 2, 3.. на такое же число равныхъ частей, какъ и полумеридіанъ $n'5's'$, и черезъ полученныя точки проводимъ прямыя BC, DE и т. д., параллельныя KL.

Откладываемъ на этихъ прямыхъ части.

$$B1 = 1C = b1 - 1c;$$
$$D2 - 2E - d2 - 2e \text{ и т. д.}$$

Точки N, B, B, F и т. д. соединяемъ плавной кривой.

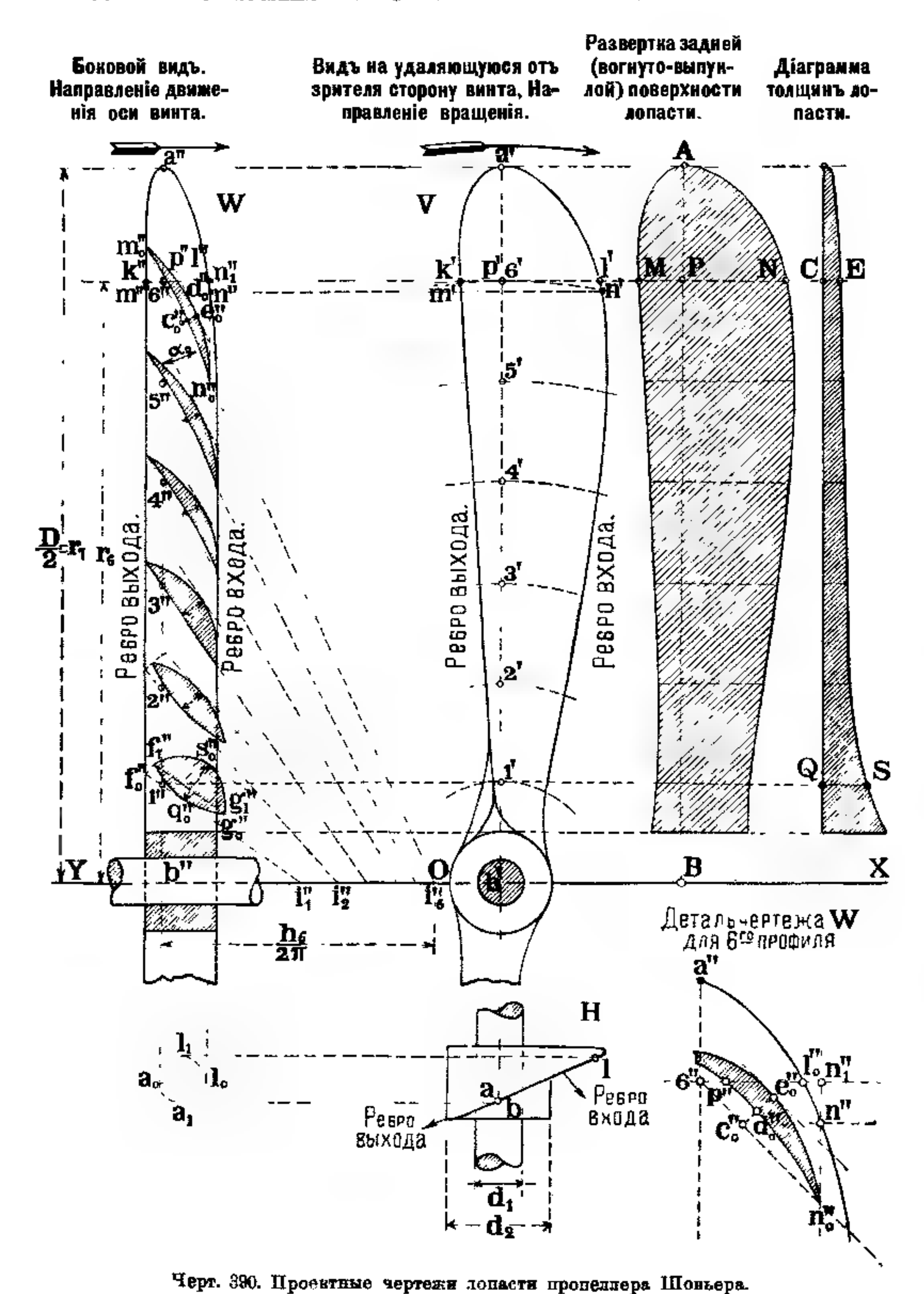
Полученная фигура и будетъ приближенной разверткой вырѣзки шара. Чѣмъ больше мы возьмемъ на шарѣ подобныхъ вырѣзковъ, тѣмъ больше будутъ соотвѣтствовать развертки соотвѣстственныхъ частей цилиндровъ разверткамъ шаровыхъ вырѣзковъ [1].

Задача № 30. Построить проекціи воздушнаго винта (пропеллера) по слѣдующимъ даннымъ:

1) діаметръ оси вала d_1
2) „ втулки. . d_2
3) „ пропеллера D.
4) имѣются чертежи развертокъ шести цилиндрическихъ сѣченій винта, отнесенныхъ къ діаметральной линіи винта и построенныхъ для цилиндровъ радіусовъ $r_1, r_2 ... r_6$, одноосныхъ съ винтомъ.

---

[1] Интересная задача на построеніе приближенной развертки неразвертываемой поверхности въ примѣненіи къ полученію выкроекъ костюма дана академикомъ Чебышевымъ. См. его полное собраніе сочиненій.



Черт. 390. Проектные чертежи лопасти пропеллера Шоньера.

Рѣшеніе.

На чертежѣ 390 показаны всѣ построенія проекцій одной лопасти винта на плоскостяхъ V, W и H.

Проводимъ вертикальную линію $a'b'$, $a''b''$ по длинѣ равную $\frac{D}{2} = r$, длинѣ лопасти. Дѣлимъ ее на части

$$b'1' = b''1'' = r_1,$$
$$b'2' = b''2'' = r_2.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b'6 = b''6'' = r_6.$$

Изъ точки b', какъ изъ центра, описываемъ дуги круговъ радіусами $b'1'$, $b'2'$..$b'6'$. Круги эти будутъ служить проекціями на V цилиндровъ, сѣкущихъ пропеллеръ, при чемъ предполагается, что оси этихъ цилиндровъ совпадаютъ съ осью винта и перпендикулярны къ V.

Въ проекціи на W строимъ развертки поверхностей этихъ цилиндровъ. Какъ извѣстно, каждый цилиндръ, напримѣръ, радіуса r_6, превращается въ прямоугольникъ, основаніе котораго равно $2\pi r_6$, а высота—равна высотѣ h_6 цилиндра.

Будемъ строить лишь части развертки каждаго цилиндра, раздѣливъ основаніе и высоту его на одно и то же число 2π. Тогда основаніе прямоугольника будетъ равно радіусу r_6

$$\frac{2\pi r_6}{2\pi} = r_6,$$

а высота будетъ равна $\frac{h_6}{2\pi}$.

Величины радіусовъ r_1.. r_6 и высотъ

$$\frac{h_1}{2\pi}, \frac{h_2}{2\pi} \cdots \frac{h_6}{2\pi}$$

даны, такъ какъ по условіямъ задачи даны развертки сѣченій пропеллера. Проводимъ линію $6''i_6''$.

Отрѣзокъ $m_0''n_0''$ этой линіи является хордой сѣченія. Само же сѣченіе заштриховано. Короткая пунктирная линія, проведенная касательной къ сѣченію параллельно $6''i_6''$, опредѣляетъ точку e_0'', наиболѣе удаленную отъ хорды $m_0''n_0''$. Разстояніе $e_0''c_0''$ точки e_0'' отъ хорды называется полною толщиною лопасти въ шестомъ сѣченіи. Отъ этого размѣра слѣдуетъ отличать непосредственную толщину лопасти $e_0''d_0''$, которая равна разности между полной толщиной и стрѣлой $c_0''d_0''$ вогнутой (задней) поверхности т. е.

$$e_0''d_0'' = e_0''c_0'' - c''_0d_0''.$$

Опускаемъ изъ конца n_0'' лопасти перпендикуляръ $n_0''n_1''$ на линію $6''6'$ (см. чертежъ W и деталь его внизу чертежа 390 справа). Прямолинейный отрѣзокъ $n_0''n_1'$ навертываемъ на дугу $6'n'$ на чертежѣ V. Точка n' и будетъ принадлежать очертанію проекціи винта на V. Проводимъ изъ n' линію параллельную $6''6'$ до пересѣченія съ $n_0''n_1''$ въ точкѣ n'', которая будетъ принадлежать очертанію проекціи винта на W. Остальныя точки контуровъ проекцій винта на W и V строятся подобнымъ же образомъ.

Замѣтимъ, что сѣченіе 1-ое лопасти немного отодвинуто по направленію $f_0''f_1'' \perp 1''i_1''$ настолько, чтобы оно касалось линіи $1''i_1''$.

При этомъ для опредѣленія толщины лопасти достаточно провести лишь одну пунктирную линію, касательную къ сѣченію и параллельную $1''i_1''$. Такъ-же построено и сѣченіе 2-ое.

Такъ какъ точки i_1'', i_2''...i_6'' даны не совпадающими другъ съ другомъ, а уда-

ленными отъ діаметральной линіи $a''b''$ винта на разныя разстоянія, то это показываетъ, что цилиндрическія винтовыя линіи, которыя на разверткахъ превращаются въ линіи хордъ разныхъ сѣченій, имѣютъ разный шагъ. Поэтому и изображенный на чертежѣ 390 винтъ называется винтомъ перемѣннаго шага

Имѣя проекціи винта на V и W, нетрудно построить проекцію его и на H.

На чертежѣ 390 показана еще приближенная развертка задней (вогнуто-выпуклой) поверхности лопасти. Чертежъ ея оріентированъ относительно линіи AB. Покажемъ, какъ строится какая нибудь точка N этой развертки, соотвѣтствующая точкѣ P въ разстояніи r_4 отъ B. Линія NM проведена черезъ $P \perp AB$. Длина PN равна выпрямленной дугѣ $p''n_0''$ по чертежу W или по детали его (внизу справа на черт. 390). Подобнымъ же образомъ $MP = m_0''p''$.

Иногда вмѣсто развертки самой поверхности лопасти дѣлаютъ развертку поверхности, образуемой хордами сѣченій

Тогда на разверткѣ отрѣзки PN и PM будутъ соотвѣтственно равны отрѣзкамъ $6''n_0''$ и $6''m_1''$ и т. д.

Наконецъ, на черт. 390 справа показана діаграмма полныхъ толщинъ лопасти въ разныхъ сѣченіяхъ. Напримѣръ $CE = c_0' e''$, $QS = q_0''s_0''$ и т. д. Замѣтимъ, что эта діаграмма не выражаетъ сѣченіе лопасти какой нибудь плоскостью, а показываетъ лишь, какъ мѣняется полная толщина лопасти въ разныхъ цилиндрическихъ сѣченіяхъ винта.

Винтъ, изображенный на чертежѣ 390 построенъ примѣнительно къ даннымъ Шоньера. Ребро выхода его — прямая линія. Въ проекціи на W большая часть проекціи винта ограничена двумя вертикальными линіями.

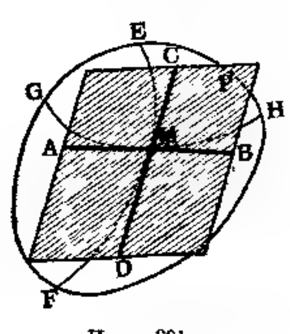
На чертежѣ стрѣлками показано направленія вращенія и поступательнаго движенія винта.

---

§ 21. Плоскости, касательныя къ кривымъ поверхностямъ.

а) *Общія замѣчанія.*

Плоскостью, касательной къ кривой поверхности въ данной точкѣ M послѣдней (черт. 391), называется такая плоскость (P), которая заключаетъ въ себѣ двѣ прямыя линіи AB и CD, проходящія черезъ точку M и соотвѣтственно касательныя къ кривымъ линіямъ GH и EF поверхности, проходящимъ также черезъ точку M.



Черт. 391.

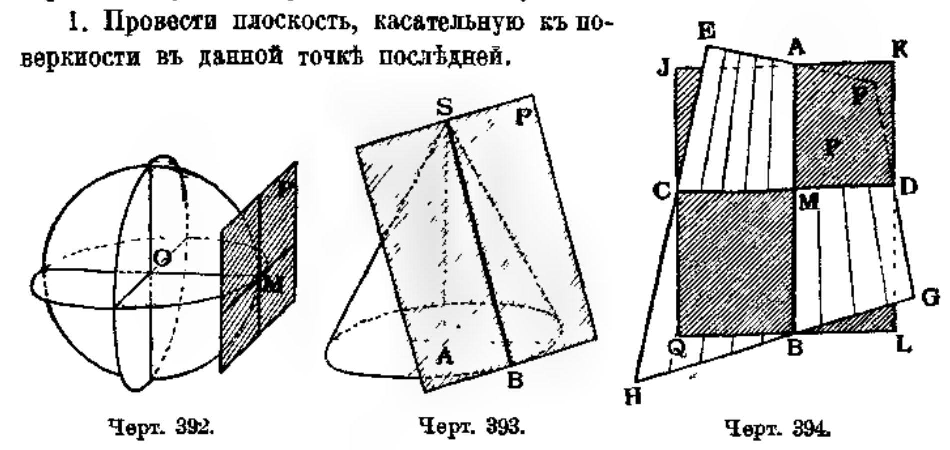
Иногда касательная плоскость къ кривой поверхности имѣетъ съ послѣдней лишь одну общую точку, напримѣръ, въ случаѣ шара (черт. 392). Иногда касательная плоскость имѣетъ съ поверхностью рядъ общихъ точекъ, лежащихъ на одной прямой линіи (SB), называемой линіей касанія, напримѣръ, въ случаѣ конуса (черт. 393).

Иногда же плоскость, касательная къ поверхности въ нѣкоторой точкѣ M, можетъ пересѣкать поверхность или по двумъ прямымъ линіямъ, напримѣръ, въ случаѣ косой плоскости (черт. 394), или по одной

прямой и по одной кривой, напримѣръ, въ случаѣ цилиндроида (черт. 395) или по двумъ кривымъ линіямъ, какъ это напримѣръ, показано на черт. 396.

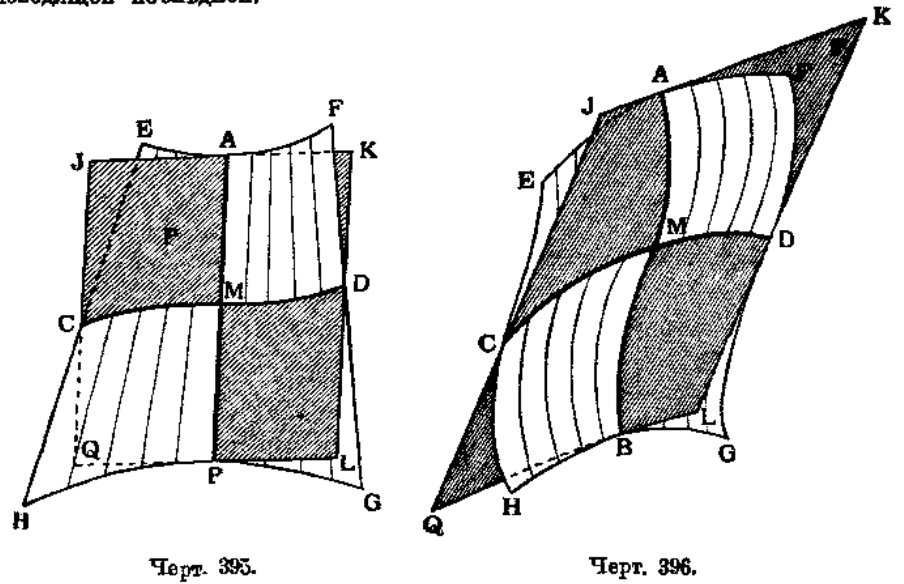
Всѣ задачи на проведеніе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ, можно раздѣлить на слѣдующіе шесть главныхъ типовъ:

1. Провести плоскость, касательную къ поверкности въ данной точкѣ послѣдней.



Черт. 392. Черт. 393. Черт. 394.

2. Провести плоскость, касательную къ поверхности по данной производящей послѣдней.



Черт. 395. Черт. 396.

3. Провести плоскость, касательную къ поверхности и проходящую черезъ данную внѣшнюю точку.

4. Провести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную данной прямой линіи.

5. Провести плоскость, касательную къ поверхности и проходящую черезъ данную прямую линію.

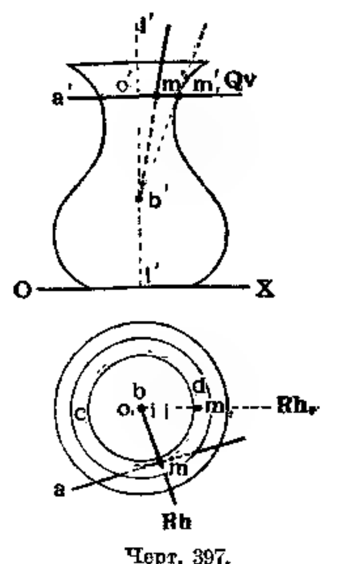
6. Провести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную данной плоскости.

Разсмотримъ последовательно рѣшеніе задачъ, относящихся къ этимъ типамъ.

b) *Плоскость, касательная къ поверхности въ данной точкѣ послѣдней.*

Общій способъ рѣшенія этой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ (черт. 391):

Проводимъ черезъ данную точку M на поверхности двѣ какихъ-нибудь плоскости и находимъ линіи GH и EF ихъ сѣченія съ поверхностью, которыя очевидно будутъ пересѣкаться въ точкѣ M. Проводимъ черезъ M двѣ прямыя AB и CD соотвѣтственно касательныя къ полученнымъ кривымъ. Эти двѣ прямыя и опредѣлять искомую касательную плоскость.



Черт. 397.

Разсмотримъ примѣненіе этого способа на примѣрахъ.

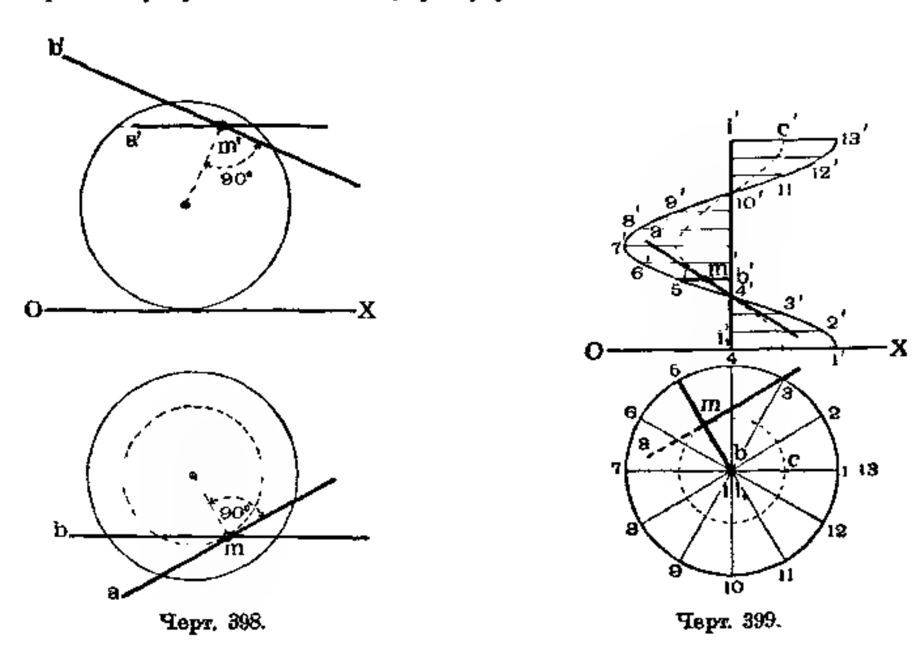
Примѣръ 1-й. Провести плоскость, касательную къ поверхности вращенія въ данной точкѣ ея M (черт. 397).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ точку M двѣ вспомогательныя плоскости: одну Q горизонтальную, разсѣкающую поверхность по кругу CDM съ центромъ въ O_1, а другую B вертикальную, проходящую черезъ ось вращенія II. Проводимъ черезъ точку M прямую AM, касательную къ кругу CDM. Для проведенія же черезъ M прямой линіи касательной къ кривой сѣченія плоскости B съ поверхностью, вращаемъ B вмѣстѣ съ точкою M вокругъ II до положенія, параллельнаго V. Тогда точка M придетъ въ положеніе M_1 (m_1, m_1'), а кривая сѣченія совпадаетъ съ очертаніемъ (контуромъ видимости) данной поверхности на V. Проводимъ въ точкѣ m_1' линію $b'm'_1$ касательную къ контурной кривой и поворачиваемъ точку M_1 обратно.

Тогда прямая M_1B займетъ положеніе MB и вмѣстѣ съ прямой AM опредѣлитъ искомую плоскость.

Примѣръ 2-й. Провести плоскость, касательную къ шару въ точкѣ M его поверхности (черт. 398).

Рѣшеніе этой задачи допускаетъ упрощеніе, по сравненію съ предыдущей. Такъ какъ плоскость, касательная къ шару въ точкѣ *M*, должна быть перпендикулярна къ радіусу шара, проведеннаго черезъ эту точку, то задача сводится къ проведенію черезъ точку *M* плоскости, перпендикулярной къ къ этому радіусу.



Черт. 398. Черт. 399.

На чертежѣ искомая плоскость опредѣлена ея горизонталью ***AM*** и фронталью ***BM***, причемъ на основаніи теоремы 9-й (стр. 33) *am* перпендикулярна къ горизонтальной проекціи радіуса, а *b'm'*—перпендикулярна къ вертикальной проекціи радіуса.

Примѣръ 3-й. Провести плоскость, касательную къ винтовому коноиду въ данной точкѣ *M* его поверхности (черт. 399).

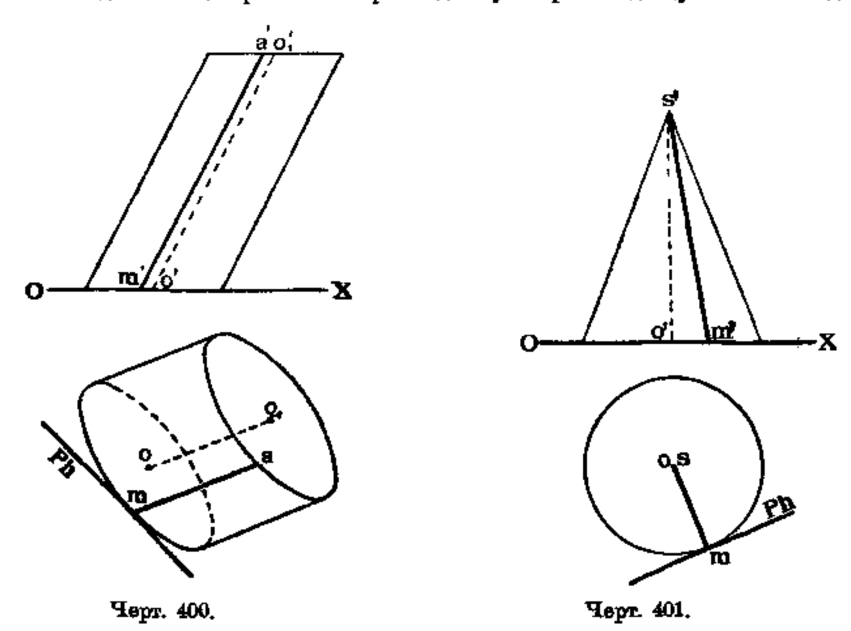
Для рѣшенія этой задачи проводимъ на поверхности коноида черезъ точку *M* двѣ линіи: производящую **5***B* и винтовую *MC*—одноосную съ винтовой **1,13**. Къ винтовой *MC* проводимъ въ точкѣ *M* касательную ***AM*** (см. стр. 167), которая вмѣсто прямой **5***B* и опредѣлитъ искомую касательную плоскость.

c) *Плоскость, касательная къ поверхности по данной прямолинейной производящей послѣдней.*

Эта задача относится только къ линейчатымъ поверхностямъ, т. е. къ такимъ, которыя могутъ быть образованы движеніемъ прямой линіи,

и является частнымъ случаемъ предыдущей задачи, именно, здѣсь одна изъ кривыхъ линій сѣченія, о которыхъ ранѣе говорилось (черт. 391), можетъ быть замѣнена прямою производящею, которая и служитъ одною изъ прямыхъ, опредѣляющихъ искомую плоскость; остается найти лишь вторую прямую.

Иногда задача является опредѣленною, иногда же неопредѣленною, т. е. иногда можно провести черезъ данную производящую только одну



Черт. 400. Черт. 401.

плоскость, касательную къ кривой поверхности, иногда же безчисленное множество.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 4-й. Провести плоскость, касательную къ цилиндру по данной его производящей *AM* (черт. 400).

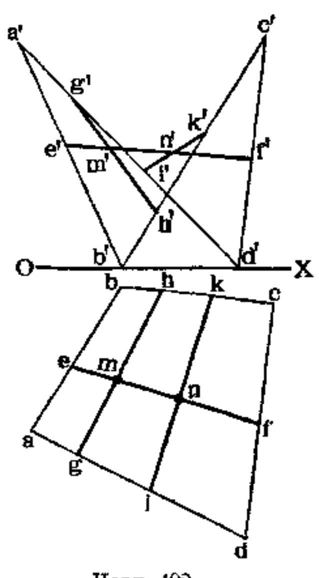
Для рѣшенія этой задачи проводимъ въ точкѣ *M*, слѣдѣ на *H* производящей *AM*, линію *Ph*, касательную къ слѣду цилиндра. Линіи *Ph* и *AM* и опредѣляютъ искомую плоскость, причемъ *Ph* является ея горизонтальнымъ слѣдомъ.

Примѣръ 5-й. Провести плоскость, касательную къ конусу по данной его производящей *SM* (черт. 401).

Задача рѣшается такъ же, какъ и предыдущая. Находимъ слѣдъ *M* данной производящей и черезъ него въ плоскости *H* проводимъ линію *Ph*, касательную къ горизонтальному слѣду конуса. Линіи *SM* и *Ph* и опредѣляютъ искомую плоскость.

Примѣръ 6-й. Провести плоскость, касательную къ косой плоскости по данной ея производящей EF (черт. 402). Косая плоскость задана двумя направляющими AD и CD и двумя производящими BC и AD. Линія EF принадлежитъ къ числу производящихъ.

Эта задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, такъ какъ черезъ любую точку данной производящей FF можно провести прямолинейную направляющую косой плоскости, которая вмѣстѣ съ EF опредѣлить плоскость, касательную къ косой плоскости. Построимъ одну изъ этихъ плоскостей.



Черт. 402.

Задаемся на EF какой нибудь точкой M и примемъ ее за точку касанія. Чтобы провести черезъ M прямолинейную направляющую, слѣдуетъ черезъ M провести вспомогательную плоскость, пареллельную направляющимъ AB и CD и найти точки G и H пересѣченія этой плоскости съ производящими AD и BC. (На чертежѣ эти построенія не показаны).

Соединяя точки G и H, получилъ прямую GMH, которая вмѣстѣ съ EF и опредѣляетъ плоскость, касательную къ косой плоскости въ точкѣ M.

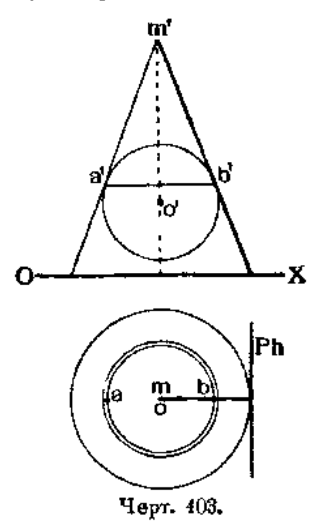
На чертежѣ 402 показана еще одна плоскость, касательная къ косой плоскости въ точкѣ N и опредѣляемая данной производящей FF и направляющей IK.

d) *Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая черезъ данную внѣшнюю точку.*

Общій способъ рѣшенія такой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ: принимаемъ данную точку за вершину нѣкоторой конической поверхности, обертывающей данную поверхность. Тогда всякая плоскость, касательная къ этой обертывающей поверхности, будетъ касаться данной поверхности и проходить черезъ заданную точку. Такъ какъ обертывающая поверхность иногда можетъ обратиться въ плоскости, касательныя къ данной поверхности, то задача можетъ имѣть или безчисленное множество рѣшеній, или нѣсколько, или, въ частномъ случаѣ, одно рѣшеніе.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 7-й. Провести плоскость, касательную къ шару и проходящую черезъ внѣшнюю точку *M* (черт. 403).



Черт. 403.

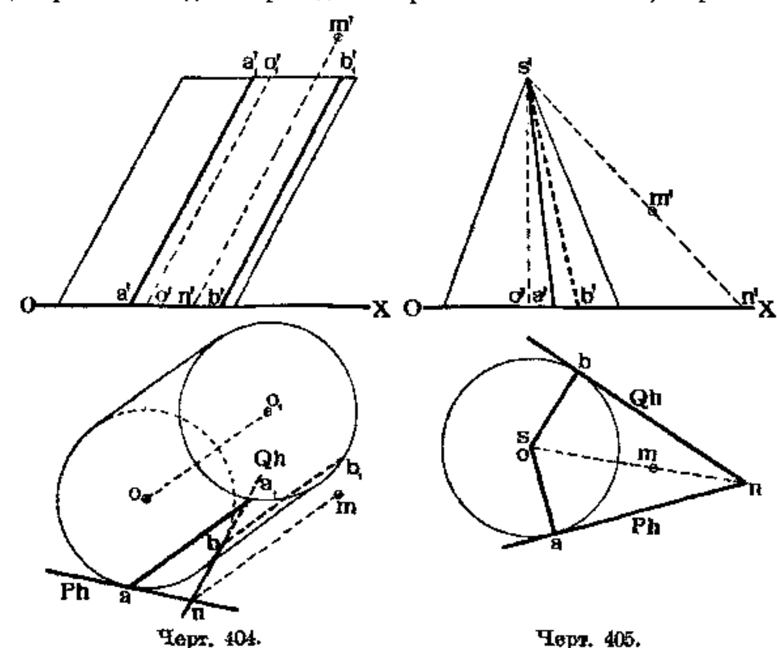
Предположимъ, что линія *OM*, соединяющая центръ *O* шара съ точкой *M*, перпендикулярна къ *H*. Если бы этого не было дано, то къ такому заданію всегда легко перейти, пользуясь методами вращенія или перемѣнной плоскостей проекцій.

Принимаемъ точку *M* за вершину конуса, описаннаго вокругъ шара и касающагося шара по кругу *AB*. Всякая плоскость, касательная къ этому конусу, очевидно, будетъ касаться и шара.

На чертежѣ показана одна изъ такихъ плоскостей, опредѣляемая слѣдомъ *Ph* и производящей *MB*.

Примѣръ 8-й. Провести плоскость, касательную къ цилиндру и проходящую черезъ внѣшнюю точку *M* (черт. 404)

Для рѣшенія задачи проведемъ черезъ *M* линію *MN*, параллельную



Черт. 404. Черт. 405.

оси цилиндра, и найдемъ ея слѣдъ *N* на *H*. Черезъ точку *N* можно провести двѣ линіи *Ph* и *Qh*, касательныя къ слѣду цилиндра. Каждая

изъ этихъ линій вмѣстѣ съ линіей MN опредѣляетъ плоскость, касательную къ цилиндру.

Задача допускаетъ два рѣшенія. Одна плоскость P касается цилиндра по производящей AA_1, другая Q — по производящей BB_1.

Если бы цилиндръ былъ заданъ не круговымъ, а зигзагообразнымъ (черт. 253), то, въ зависимости отъ вида цилиндра, можно было бы провести одну, двѣ, три или болѣе плоскостей, къ нему касательныхъ.

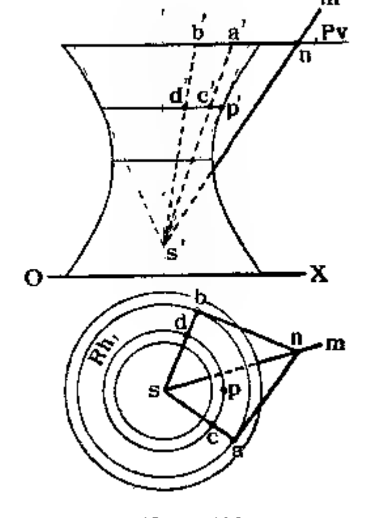
Примѣръ 9-й. Провести плоскость, касательную къ конусу и проходящую черезъ внѣшнюю точку M (черт. 405).

Соединяемъ точки S и M и находимъ слѣдъ N линіи SM на плоскости основанія конуса. Изъ точки N проводимъ линіи Ph и Qh, касательныя къ кругу основанія конуса въ точкахъ A и B. Каждая изъ линій Ph и Qh вмѣстѣ съ линіей SN опредѣляетъ плоскость, касательную къ конусу. Производящими касанія служатъ линіи AS и BS.

Примѣръ 10-й. Провести плоскость, касательную къ однополому гиперболоиду вращенія и проходящую черезъ внѣшнюю точку M (черт. 406).

Задача, какъ и въ примѣрѣ 7-мъ, допускаетъ безчисленное множество рѣшеній. Построимъ одну какую нибудь плоскость, касательную къ гиперболоиду въ нѣкоторой, пока неизвѣстной, точкѣ, лежащей, напримѣръ, на кругѣ CPD.

Впишемъ въ гиперболоидъ конусъ, одноосный съ гиперболоидомъ и касательный къ послѣднему по кругу CPD. Для того, чтобы найти вершину этого конуса, достаточно провести въ точкѣ P, лежащей на меридіанѣ гиперболоида, параллельномъ V, касательную къ этому меридіану, и найти точку S пересѣченія этой касательной съ осью гиперболоида. Точка S и будетъ вершиной конуса.



Черт. 406.

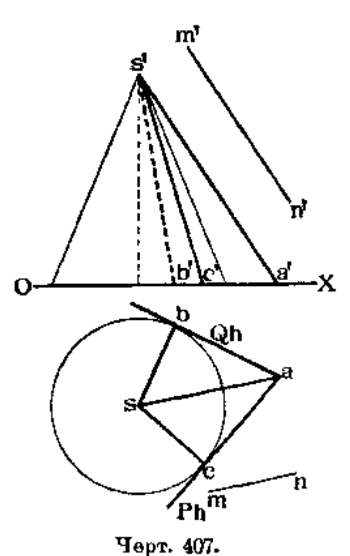
Остается теперь провести черезъ точку M плоскость, касательную къ конусу. Рѣшеніе такой задачи было дано въ примѣрѣ 9-мъ на этой страницѣ.

Однако, въ нашемъ случаѣ основаніе конуса не лежитъ въ H. Поэтому находимъ слѣдъ N линіи SM не на H, а на плоскости P основанія конуса, и черезъ точку N проводимъ линіи NA и NB касательныя къ кругу основанія конуса. Каждая изъ прямыхъ AN и BN вмѣстѣ съ прямой SN опредѣляетъ плоскость, касательную къ гиперболоиду.

e) *Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной прямой линіи.*

Общій способъ рѣшенія этой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ:

Проводимъ рядъ линій, касательныхъ къ данной поверхности и параллельныхъ данной линіи. Совокупность этихъ линій образуетъ нѣкоторый цилиндръ, обертывающій данную поверхность. Всякая плоскость, касательная къ этому цилиндру, будетъ касательна и къ данной поверхности. Поэтому при кривой поверхности случайнаго вида задача допускаетъ безчисленное множестео рѣшеній.



Черт. 407.

Въ частныхъ случаяхъ заданія поверхности обертывающій цилиндръ можетъ обратиться въ плоскости—одну, двѣ или нѣсколько.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 11-й. Провести плоскость, касательную къ конусу и параллельную прямой MN (черт. 407).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ вершину S конуса прямую SA, параллельную MN, и находимъ ея слѣдъ A на плоскости основанія конуса.

Изъ A проводимъ линіи Ph и Qh, касательныя къ кругу основанія конуса въ точкахъ C и B.

Линіи Ph и SC, а также Qh и SB опредѣляютъ двѣ плоскости P и Q, удовлетворяющія условіямъ задачи.

Производящими касанія будутъ служить линіи SC и SB.

Примѣръ 12-й. Провести плоскость, касательную къ цилиндру и параллельную прямой MN (черт. 408).

Для рѣшенія этой задачи проводимъ черезъ какую нибудь точку O_2 оси цилиндра линію, параллельную прямой MN, и находимъ ея слѣдъ A на плоскости основанія цилиндра.

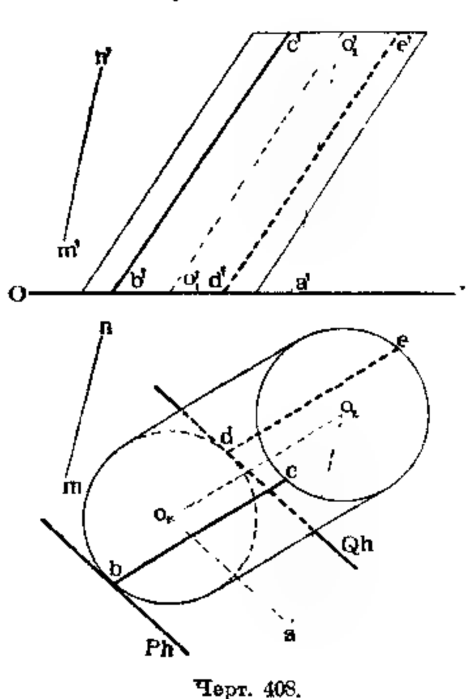
Соединяемъ точки O_1 и A. Слѣды Ph и Qh искомыхъ плоскостей должны быть параллельны линіи O_1A и должны касаться круга основанія цилиндра въ точкахъ B в D, лежащихъ на діаметрѣ BD круга основанія, перпендикулярномъ къ O_1A. Производящими касанія будутъ служить линіи BC и BE.

Задача въ общемъ случаѣ допускаетъ два рѣшенія.

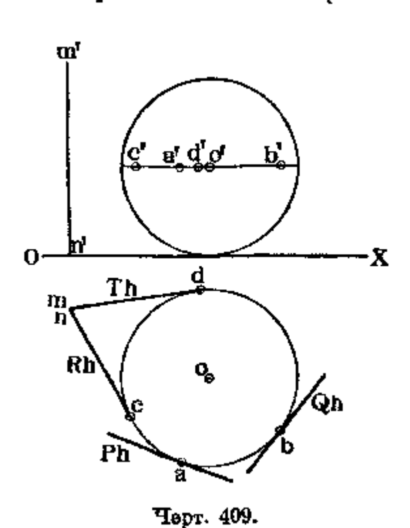
Примѣръ 13-й. Провести плоскость, касательную къ шару и параллельную прямой MN (черт. 409).

Предположимъ, что прямая MN перпендикулярна къ H. Если бы этого не было дано, то, пользуясь методомъ вращенія или перемѣны плоскостей проекцій, можно было бы заданную систему, шаръ и прямую, привести къ упомянутому, выгодному для рѣшенія задачи, положенію.

Задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній. Дѣйствительно, всякая плоскость P или Q, перпендикулярная къ H и касательная къ экватору шара будетъ удовлетворять поставленнымъ условіямъ. На чертежѣ обозначены плоскости P и Q, перпендикулярныя къ H и касательныя къ шару въ точкахъ A и B.



Черт. 408.



Черт. 409.

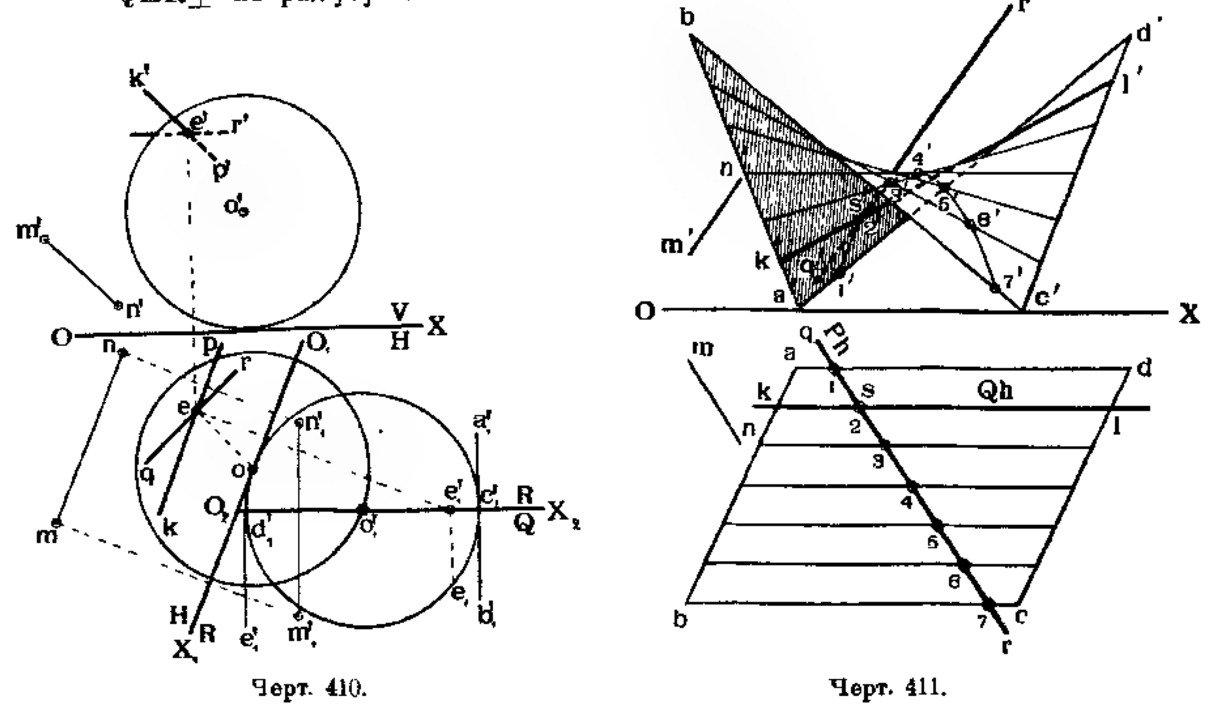
На чертежѣ 410 эта задача рѣшена въ общемъ случаѣ заданія прямой MN.

Переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{H}{R}$, причемъ R проводимъ черезъ центръ шара параллельно MN и перпендикулярно къ H

Строимъ проекціи шара и прямой NM на R. Проводимъ линіи $a_1'c_1'b_1'$ и $d_1'e_1'$ касательныя къ проекціи шара на R и параллельныя n_1' m_1'. Линія c_1' d_1' будетъ проекціей на R экватора, на которомъ будутъ находиться точки касанія съ шаромъ любыхъ плоскостей, параллельныхъ MN. Задаемся проекціей e_1' одной изъ такихъ точекъ. Чтобы опредѣлить разстояніе самой точки E до плоскости R, переходимъ къ системѣ

$\frac{R}{Q}$, принимая за плоскость Q плоскость самого экватора CED. Тогда новая горизонтальная проекцiя точки E будетъ въ мѣстѣ e_1, и разстоянiе точки E отъ плоскости R будетъ равно $e_1 e_1'$.

Теперь остается только найти точку E въ системѣ $\frac{C}{H}$ и провести черезъ нее двѣ линiи, опредѣляющiя плоскость, касательную къ шару. На чертежѣ проведена одна изъ такихъ линiй $KEP \parallel MN$ и другая $QER \perp$ къ радiусу EO.



Черт. 410.

Черт. 411.

Примѣръ 14-й. Провести плоскость, касательную къ косой плоскости и параллельную прямой MN (черт. 411).

Для рѣшенiя задачи разсѣчемъ косую плоскость случайной плоскостью P, параллельной MN и перпендикулярной къ H. Построимъ линiю сѣченiя 1, 2, 3...7 и проведемъ къ послѣдней касательную прямую QR, параллельную MN. Пусть S будетъ точкой касанiя.

Тогда плоскость, опредѣляемая прямою QR и производящей KL косой плоскости, проходящей черезъ точку S, и будетъ удовлетворять поставленнымъ условiямъ.

Задача допускаетъ безчисленное множество рѣшенiй, такъ какъ можно провести безчисленное множество плоскостей, пересѣкающихъ косую плоскость и параллельныхъ MN [1]).

---

[1]) Возможно построить плоскости, касательныя къ линейчатымъ неразвертываемымъ и другимъ поверхностямъ, болѣе точно, не пользуясь кривыми линiями подобными кривой 1—7 на черт. 411, однако, для сего необходимо знать нѣкоторыя теоремы изъ высшей геометрiи; подробности о семъ см. В. Курдюмовъ. «Курсъ Начертательной Геометрiи» Отдѣлъ I, часть II. Стр. 63; теорема Шаля.

f) *Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая черезъ данную линію.*

Рѣшеніе этой задачи въ общемъ случаѣ, при случайномъ заданіи прямой линіи и поверхности, не всегда возможно.

Напримѣръ, для шара эта задача возможна лишь тогда, когда прямая не пересѣкаетъ его поверхности.

На чертежѣ 409 показаны двѣ плоскости R и T, проходящія черезъ прямую MN и касательныя къ шару въ точкахъ C и D.

Для поверхностей цилиндрическихъ эта задача возможна тогда, когда заданная прямая либо параллельна производящимъ цилиндра, либо, при продолженіи, касается цилиндра. На чертежѣ 404 показаны двѣ плоскости P и Q, проходящія черезъ прямую $MN \parallel OO_1$ и касательныя къ цилиндру по производящимъ AA_1 и BB_1.

Для поверхностей коническихъ эта задача возможна только тогда, когда заданная прямая или проходитъ черезъ вершину конуса, или, при продолженіи, касается конуса.

Напримѣръ, на чертежѣ 405 показаны двѣ плоскости P и Q, проходящія черезъ прямую SM и касательныя къ конусу по производящимъ SA и SB.

Для линейчатыхъ поверхностей эта задача въ общемъ случаѣ возможна. Рѣшеніе задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ: вокругъ данной поверхности описывается цилиндръ, производящія котораго были бы параллельны данной прямой. Каждая такая производящая проводится по способу, объясненному для прямой $QR \parallel MN$ (черт. 411). Искомая плоскость будетъ проходить черезъ данную прямую и будетъ касатся упомянутаго обертывающаго цилиндра по нѣкоторой его производящей.

g) *Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной плоскости.*

Рѣшеніе этой задачи возможно не всегда.

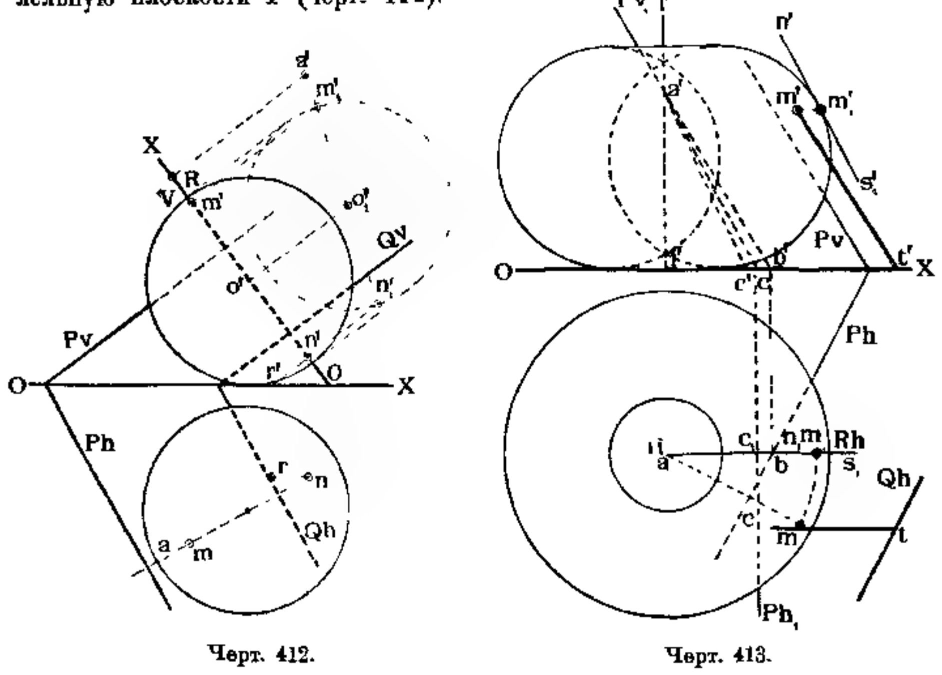
Для цилиндрическихъ поверхностей она рѣшается тогда, когда данная плоскость параллельна оси цилиндра. Для коническихъ поверхностей рѣшеніе задачи возможно, если плоскость заключаетъ въ себѣ линіи, параллельныя одной какой-нибудь производащей конуса. Для поверхностей вращенія и для линейчатыхъ поверхностей рѣшеніе задачи возможно въ общемъ случаѣ.

При этомъ для проведенія искомой плоскости можно поступить слѣдующимъ образомъ:

Описать вокругъ данной поверхности какой нибудь обертывающій цилиндръ съ производящими, параллельными какой нибудь линіи, лежащей въ данной плоскости, а затѣмъ провести плоскость, касательную къ упомянутому обертывающему цилиндру. Эта плоскость и будетъ искомой.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 15-й. Провести плоскость, касательную къ шару и параллельную плоскости P (черт. 412).



Черт. 412. Черт. 413.

Если искомая плоскость Q должна касаться шара и быть параллельной плоскости P, то радіусъ шара, проведенный въ точку касанія будетъ перпендикуляренъ къ плоскостямъ P и Q. Строимъ такой радіусъ, проводя его проекціи $o'n'$ и on перпендикулярными съ соотвѣтственнымъ слѣдамъ Pv и Ph. Находимъ, пользуясь методомъ перемѣны плоскостей проекціи, точку N пересѣченія этого радіуса съ шаромъ и проводимъ черезъ эту точку плоскость $Q \parallel P$. Для этого черезъ N проведена линія $NR \parallel Pv$ и черезъ слѣдъ R этой линіи проведена линія $Qh \parallel Ph$.

Далѣе найдена точка схода слѣдовъ плоскости Q и проведена линія $Qv \parallel Pv$.

Примѣръ 16-й. Провести плоскость, касательную къ поверхности вращенія (тора) и параллельную плоскости P (черт. 413).

Для рѣшенія задачи поворачиваемъ данную поверхность и плоскость

P вокругъ оси II до тѣхъ поръ, пока плоскость P не расположится перпендикулярно къ V. Слѣды ея въ повернутомъ положеніи обозначимъ черезъ Pv_1 и Ph_1. Построимъ теперь плоскость, касательную къ тору и параллельную повернутой плоскости P.

Для полученія точки касанія проводимъ касательную $n_1's_1' \parallel Pv_1$ и обозначаемъ точку касанія черезъ m_1', m_1.

Возвращаемъ теперь торъ, плоскость P и точку M въ прежнее положеніе и проводимъ черезъ M плоскость Q, параллельную P.

Для построенія слѣда Qh, черезъ точку M проведена фронталь плоскости Q, параллельная Pv, найденъ слѣдъ T этой фронтали, и черезъ T проведена линія $Qh \parallel Ph$.

h) *Нормали къ кривымъ поверхностямъ.*

Такъ какъ нормаль въ какой нибудь точкѣ кривой поверхности перпендикулярна къ плоскости, касательной къ поверхности въ той же точкѣ, то различныя задачи на проведеніе нормалей въ данной точкѣ поверхностей на практикѣ сводятся къ задачамъ на проведеніе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ.

Если мы выберемъ какую нибудь производящую линейчатой поверхности, зададимся на этой производящей рядомъ точекъ и проведемъ черезъ эти точки нормали къ данной поверхности, то совокупность этихъ нормалей будетъ образовывать новую поверхность, называемую *поверхностью нормальной* къ данной поверхности по данной ея производящей.

Разсмотримъ проведеніе нормалей къ поверхности изъ точки M, лежащей внѣ послѣдней.

Для шара таковой нормалью будетъ служить линія, соединяющая центръ шара съ точкою M.

Въ случаѣ цилиндра или конуса, имѣющихъ ось, проводимъ плоскость черезъ точку M и ось данной поверхности, находимъ производящую сѣченія этой плоскости съ поверхностью и изъ точки M опускаемъ на эту производящую перпендикуляръ, который и будетъ искомою нормалью.

Разсмотримъ, какъ рѣшается въ общемъ случаѣ задача въ пространствѣ на приближенное проведеніе изъ точки N, лежащей внѣ поверхности, нормали къ послѣдней (черт. 414).

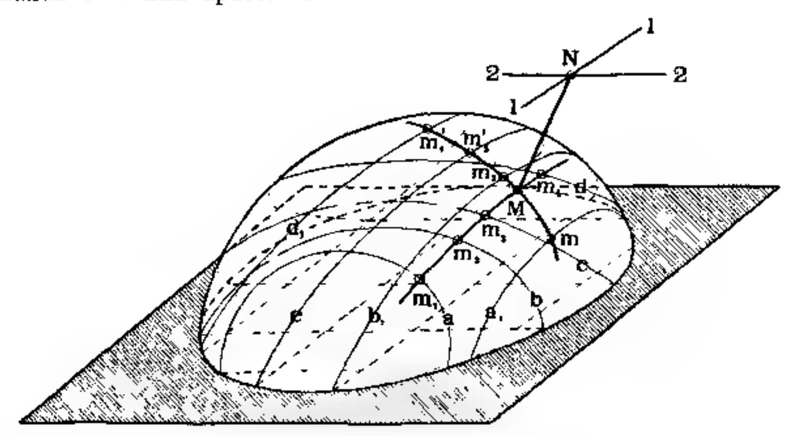
Проведемъ черезъ точку N двѣ случайныхъ линіи 11 и 22.

Далѣе черезъ каждую изъ этихъ линій проведемъ рядъ плоскостей, сѣкущихъ данную поверхность по кривымъ линіямъ a, b, c, d,... и a_1 b_1 c_1 d.

Проведемъ изъ точки N нормали къ линіямъ a, b, c, d, ... такъ, какъ это было показано на черт. 233, и найдемъ точки m_1, m_2, m_3, m_4, ...

пересѣченія этихъ нормалей съ линіями a, b, c, d, ... Соединимъ точки m_1, m_2, m_3, m_4 плавной кривой.

Проведемъ изъ точки N такія же нормали къ кривымъ a_1, b_1, c_1, d_1 и подобнымъ же образомъ найдемъ точки m_1', m_2', m_3', m_4' пересѣченія нормалей съ этими кривыми.



Черт. 414.

Точка M пересѣченія кривыхъ $m_1'm_4'$ и m_1m_4 и опредѣлитъ съ точкою N искомую нормаль къ поверхности, такъ какъ линія MN въ точкѣ M будетъ нормальна къ двумъ кривымъ m_1m_4 и $m_1'm_4'$, начерченнымъ на поверхности.

§ 22. Тѣни кривыхъ поверхностей.

а) *Общія замѣчанія.*

Ранѣе въ § 15 (стр. 131) нами были изложены общія правила о выборѣ направленія лучей свѣта и о построеніи собственныхъ и падающихъ тѣней для тѣлъ, ограниченныхъ плоскими гранями. Распространимъ теперь эти правила на кривыя поверхности.

Пусть въ пространствѣ даны: какое нибудь тѣло M (черт. 415), ограниченное случайною кривою поверхностью, направленіе лучей свѣта PP_1 и плоскость или кривая поверхность B.

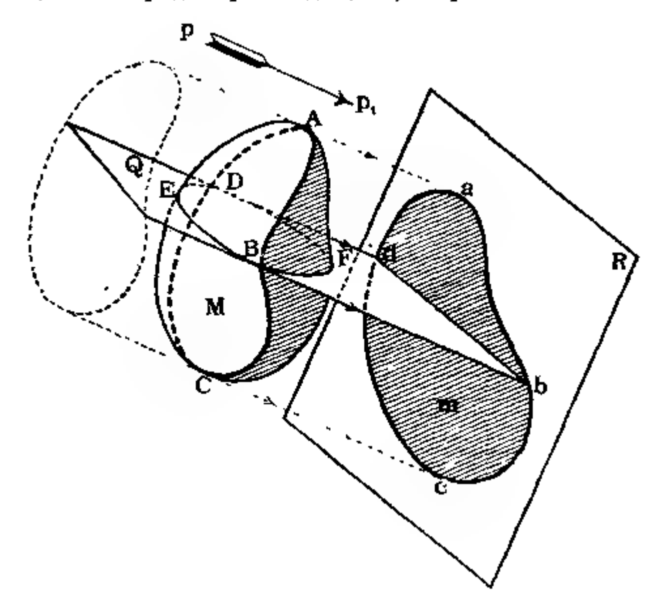
Опишемъ вокругъ тѣла M цилиндръ, касательный къ M, съ производящими, параллельными направленію PP_1.

Линія $ABCD$ касанія этого цилиндра съ тѣломъ M будетъ служить *линіей отдѣла* на поверхности M собственной тѣни отъ освѣщенной поверхности. Эту линію называютъ также *контуромъ собственной тѣни.*

Линія $abcd$ сѣченія упомянутаго цилиндра съ плоскостью или кри-

вою поверхностью B будетъ служить контуромъ падающей тѣни отъ тѣла M на поверхность B. Очевидно, контуръ падающей тѣни является тѣнью отъ контура собственной тѣни. Поэтому, при построеніи собственныхъ и падающихъ тѣней кривыхъ поверхностей, сначала слѣдуетъ находить контуры собственныхъ тѣней, а потомъ уже строить тѣни отъ этихъ контуровъ.

Цилиндръ, обертывающій данную поверхность, можно разсматривать, какъ состоящій изъ ряда производящихъ, параллельныхъ PP'. Пока-



Черт. 415.

жемъ, какъ построить въ пространствѣ одну изъ этихъ производящихъ (черт. 415).

Разсѣчемъ тѣло M плоскостью $Q \parallel PP_1$ и проведемъ линіи Bb и Dd касательныя къ кривой $DFDE$ сѣченія и параллельныя PP_1.

Линіи Bb и Dd будутъ производящими упомянутаго цилиндра. Точки D и D будутъ принадлежать контуру собственной тѣни, а точки b и d пересѣченія найденныхъ производящихъ съ поверхностью B будутъ принадлежать контуру падающей тѣни. Проводя рядъ плоскостей, подобныхъ Q, и производя описанныя построенія, можно получить рядъ точекъ подобныхъ B, D, b и d.

Соединяя соотвѣтственно эти точки между собою, получимъ въ пространствѣ искомыя контуры тѣней.

Разсмотримъ рѣшеніе задачи на построеніе тѣней въ рядѣ примѣровъ.

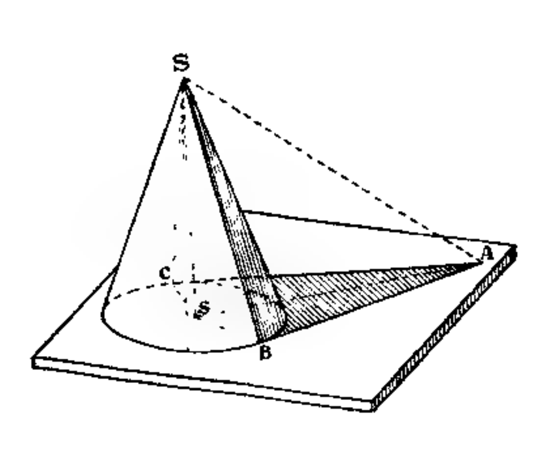
в) *Примѣры построенія тѣней.*

Примѣръ 1-й. Построить собственныя и падающія тѣни прямого кругового конуса (черт. 416 и 417).

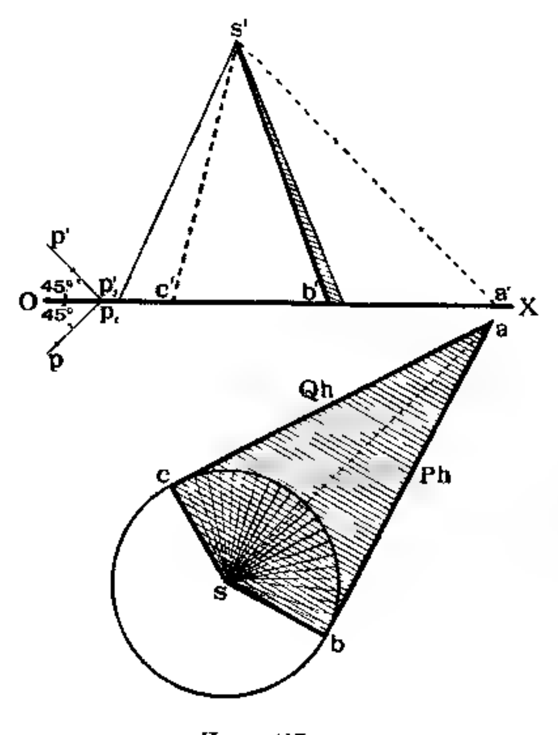
Въ этомъ случаѣ обертывающій цилиндръ превращается въ двѣ плоскости, касательныя къ конусу и параллельныя лучу свѣта.

На черт. 416 показано построеніе этихъ плоскостей въ пространствѣ, а на чертежѣ 417—въ проекціяхъ.

Производящія SB и SC касанія этихъ плоскостей P и Q съ конусомъ будутъ служить контурами собственной тѣни конуса. Тѣни же отъ



Черт. 416.



Черт. 417.

этихъ линій на H и часть BC круга основанія конуса являются контуромъ падающей тѣни на H.

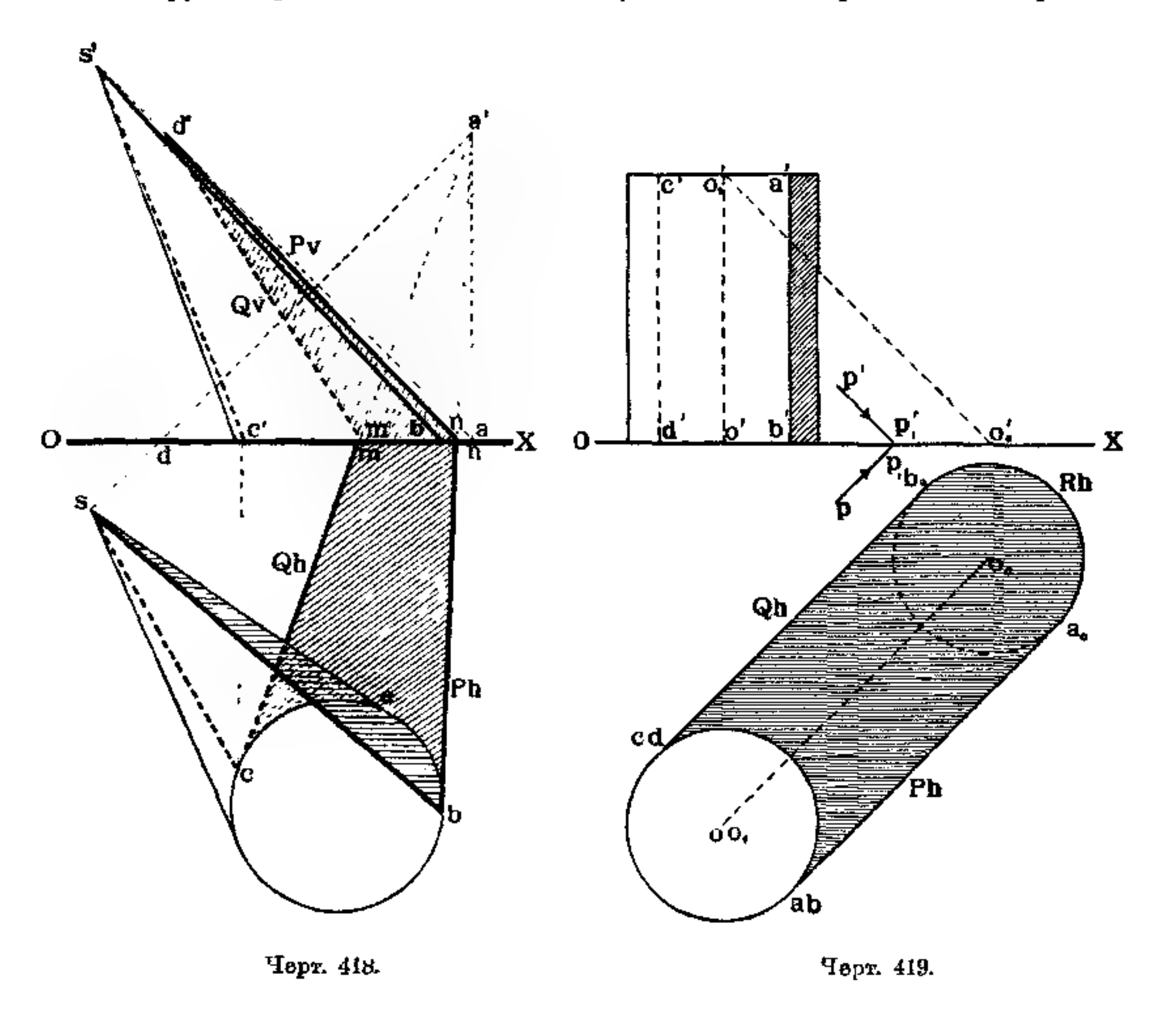
Примѣръ 2-й. Построить собственныя и падающія тѣни наклоннаго конуса, стоящаго на H (черт. 418).

Задача рѣшается такъ же, какъ и предыдущая. Проводимъ плоскости P и Q касательныя къ конусу и параллельныя лучу свѣта. Для этого черезъ вершину S проводимъ лучъ и находимъ его слѣды на H, въ точкѣ A и на V въ точкѣ D. Изъ A проводимъ Ph и Qh касательными къ кругу основанія конуса въ точкахъ B и C.

Замѣчаемъ также точки M и N пересѣченія Qh и Ph съ OX. Соединяемъ D съ M и N. Линіи SB и SC и дуга BEC являются контуромъ собственной тѣни конуса; линіи DM, DN и MN служатъ контуромъ падающей тѣни на V, а линіи CM, MN, NB и HEC—контуромъ падающей тѣни на H.

Примѣръ 3-й. Построить собственныя и падающія тѣни прямого кругового цилиндра (черт. 419).

Въ этомъ случаѣ лучевая поверхность, обертывающая данный цилиндръ, состоятъ изъ двухъ плоскостей P и Q, касательныхъ къ цилиндру по производящимъ AB и CD, и изъ цилиндрической поверх-



Черт. 418. Черт. 419.

ности, производящія которой проходятъ черезъ точки дуги AC круга верхняго основанія.

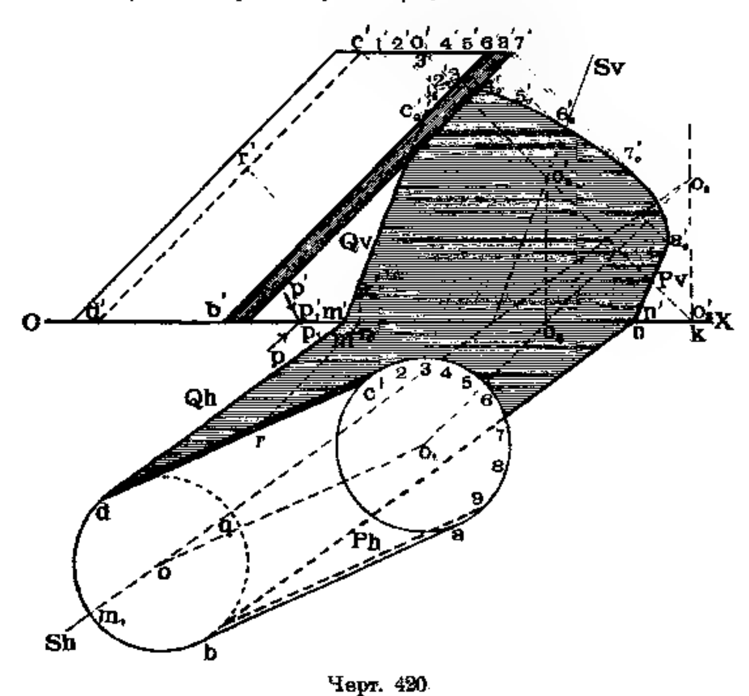
Сѣченіемъ этого лучевого цилиндра съ H будетъ являться дуга круга a_0b_0, того же радіуса, что и цилиндръ. Центръ же O_0 этого круга будетъ находиться въ точкѣ пересѣченія съ H линіи $O_1O_0 \parallel PP_1$.

Нетрудно видѣть, что слѣды Ph и Qh плоскостей касательныхъ къ цилиндру, будутъ касаться круговъ bd и a_0b_0 и будутъ параллельны горизонтальной проекціи pp_1 луча свѣта.

Примѣръ 4-й. Построить тѣни наклоннаго цилиндра (черт. 420).

Контурами собственной тѣни будутъ являться: часть AC [1]) дуги круга верхняго основанія и производящія AB и CD касанія цилиндра съ плоскостями P и Q, параллельными лучу свѣта.

Построимъ эти плоскости. Для этого проведемъ черезъ конецъ O_1 оси цилиндра лучъ $O_1O_2 \parallel PP_1$ и найдемъ слѣды Sh и Sv плоскости, заключающей ось OO_1 цилиндра и лучъ O_1O_2.



Черт. 420

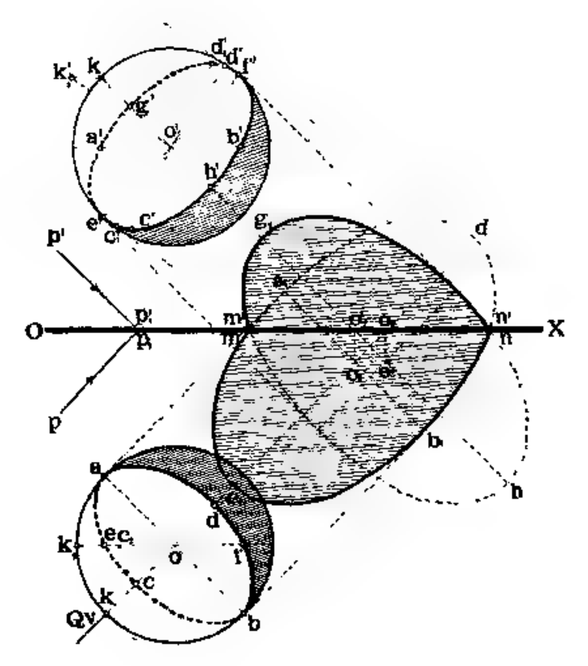
Слѣды искомыхъ плоскостей Q и P будутъ параллельны слѣдамъ плоскости S. Проводимъ Ph и Qh касательными къ кругу основанія цилиндра и параллельными Sh до пересѣченія съ OX въ точкахъ M и N. Далѣе проводимъ черезъ M и N линіи Qv и Pv параллельными Sv до пересѣченія съ лучами CC_0 и AA_0 въ точкахъ C_0 и A_0. Наконецъ, проводимъ черезъ рядъ точекъ $C123\ldots A$ дуги круга верхняго основанія цилиндра лучи и находимъ точки пересѣченія ихъ съ плоскостью V. Соединяя между собою построенныя точки, получимъ дугу $a_0'c_0'$ эллипса, которая будетъ принадлежать контуру падающей тѣни цилиндра. Полный контуръ падающей тѣни будетъ линія $dmc_0'a_0'nbd$; контуромъ собственной тѣни будетъ линія $ABQDC6A$.

Примѣръ 5-й. Построить собственныя и падающія тѣни шара (черт. 421). Цилиндръ, обертывающій шаръ и параллельный лучамъ

[1]) На черт. 420 внизу буквы a и b должны быть у концовъ производящей касанія цилиндра съ плоскостью P.

свѣта, касается шара по большому кругу. Этотъ кругъ на V и H спроектируется въ видѣ одинаковыхъ эллипсовъ, бóльшій діаметръ которыхъ будетъ равенъ діаметру шара и будетъ перпендикуляренъ къ соотвѣтственной проекціи луча, т. е. $ab \perp pp_1$ и $e'f' \perp p'p_1'$.

Построимъ проекціи круга, контура собственной тѣни, на H. Разсѣчемъ шаръ плоскостью Q, проходящей черезъ центръ шара, параллельной лучу и перпендикулярной къ H и повернемъ эту плоскость вокругъ вертикальной оси, проходящей черезъ центръ O, въ положеніе $\parallel V$.



Черт. 421.

Найдемъ и повернутое положеніе K_1O луча KO. Кругъ сѣченія плоскости Q съ шаромъ послѣ поворота спроектируется на H въ кругъ, совпадающій съ вертикальной проекціей контура шара.

Проводимъ на V линіи параллельныя $k_1'o'$ и касательныя къ кругу въ точкахъ c_1' и d_1. Поворачиваемъ теперь плоскость Q съ точками C_1 и D_1 въ прежнее положеніе. Точки c и d и опредѣлятъ концы малаго діаметра эллипса, являющагося горизонтальной проекціей контура собственной тѣни.

Вертикальная проекція этого контура будетъ также эллипсъ, одинаковый съ первымъ. Діаметръ $g'h'$ равенъ cd, причемъ $g'h' \perp e'f'$.

Контуромъ падающей тѣни на H будетъ эллипсъ съ центромъ въ точкѣ O_1, которая является какъ бы тѣнью на H отъ центра шара.

Бóльшая ось c_1d_1 этого эллипса является какъ бы тѣнью отъ линіи CD, а меньшая a_1b_1 тѣнью отъ AB.

Подобнымъ же образомъ строится и эллипсъ, контуръ падающей тѣни на V.

Замѣтимъ, что оба эти эллипса пересѣкаются въ точкахъ M и N лежащихъ на оси OX.

Примѣръ 6-й. Построить собственныя и падающія тѣни кольца.

На чертежѣ 422 изображено кольцо, образованное вращеніемъ вертикальнаго круга вокругъ оси $II_1 \perp H$, причемъ ось эта лежитъ въ плоскости круга.

Направленіе луча свѣта pp_1, $p'p'_1$.

Построимъ контуръ собственной тѣни. Нѣсколько точекъ этого контура можно найти, проводя плоскости касательныя къ кольцу, перпендикулярныя къ H или къ V и параллельныя лучу.

Такимъ способомъ найдены точки A, B, C, D, N, H, V и **3**, причемъ первыя четыре лежатъ въ плоскости параллельной V и проходящей черезъ ось кольца. Опредѣляются онѣ на V проведеніемъ линій касательныхъ къ кругамъ контура кольца и параллельныхъ $p'p'_1$.

Вторыя четыре точки опредѣляются на H проведеніемъ линій, касательныхъ къ контуру кольца и параллельныхъ pp_1. Лежатъ эти точки на экваторахъ кольца.

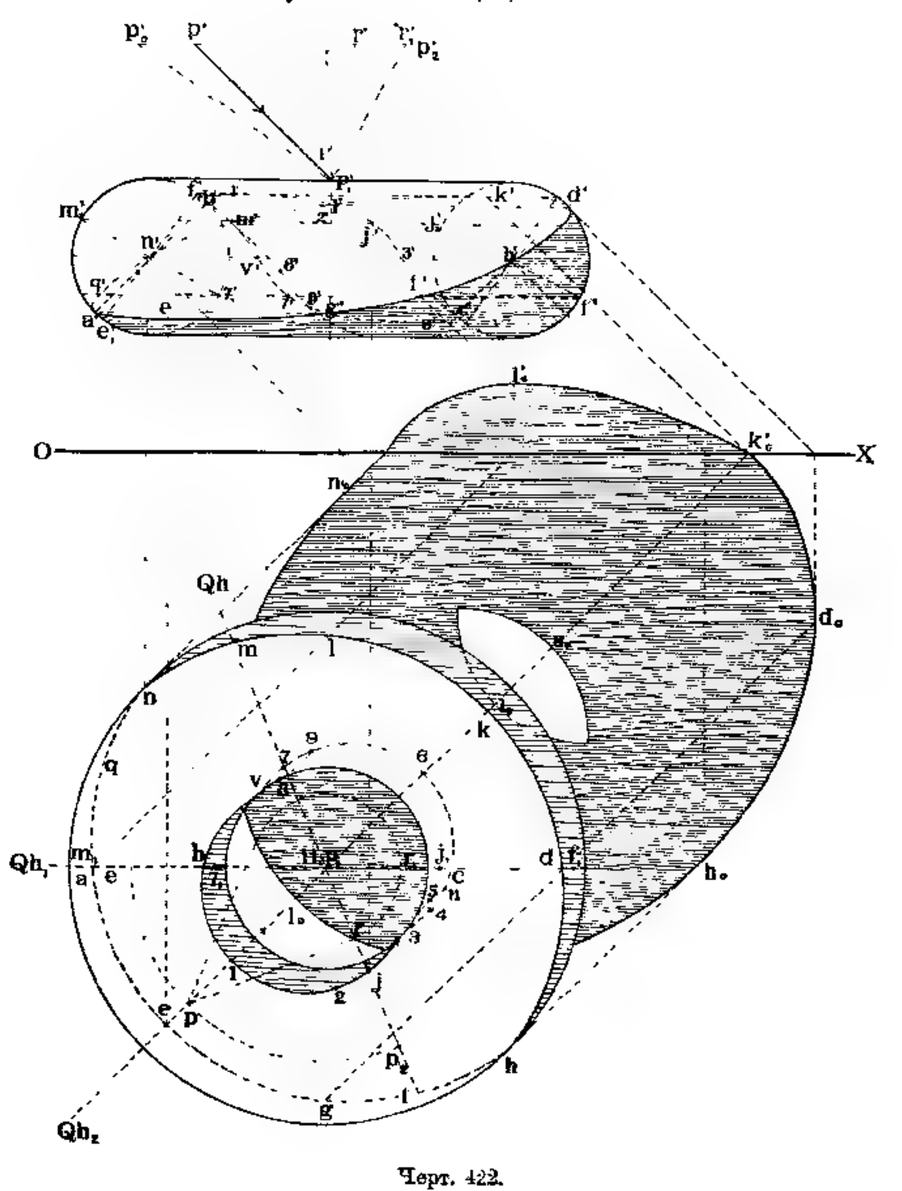
Покажемъ построеніе случайныхъ точекъ контура собственной тѣни кольца.

Проведемъ черезъ ось кольца случайную плоскость Q. Спроектируемъ лучъ PP_1 на эту плоскость въ линію RP_1 (rp_1, $r'p_1'$). Повернемъ Q вокругъ II_1 въ положеніе Q_1, параллельное V. Тогда линія RP_1 займетъ положеніе R_1P_1 ($r_1'p_1'$, r_1p_1), а круги сѣченія плоскости Q съ кольцомъ совпадутъ съ меридіональными кругами кольца, параллельными плоскости V. Проводимъ теперь на V линіи, параллельныя $r_1'p_1'$ и касательныя къ кругамъ въ точкахъ m_1', $7_1'$, j_1' и f_1'. Находимъ горизонтальныя проекціи этихъ точекъ на линіи Qh_1 и поворачиваемъ плоскость Q съ найденными точками въ прежнее положеніе. Тогда точки придутъ въ мѣста M, **7**, J и F.

Вмѣсто того, чтобы строить проекцію RP_1 луча PP_1 на плоскость Q, можно было бы вмѣстѣ съ плоскостью Q повернуть самый лучъ PP_1 вокругъ оси II_1 на тотъ же уголъ въ томъ же направленіи. Очевидно, послѣ поворота вертикальная проекція $p_2'p_1'$ должна совпасть съ $r_1'p_1'$.

Продолжая построенія, подобныя тѣмъ, которыя были сдѣланы для нахожденія точекъ M, **7**, J и F, можно найти еще рядъ точекъ. Соединяя послѣднія плавными кривыми, получимъ контуръ собственной тѣни кольца. Замѣтимъ, что для полученія наивысшихъ и наинизшихъ

точекъ этого контура слѣдуетъ проводить плоскость Q_2 черезъ лучъ PP_1. Въ этой плоскости получатся точки E, **1**, **6** и K.



Черт. 422.

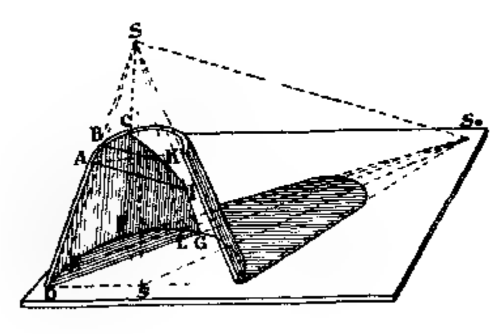
Контуръ падающей тѣни на H и V получится, какъ тѣнь отъ контура собственной тѣни кольца.

Замѣтимъ, что часть контура собственной тѣни у горла кольца даетъ падающую тѣнь на нижнюю часть самого кольца у горла его.

Контуръ этой падающей тѣни на самое кольцо показанъ на чертежѣ пунктирными линіями V **8, 9** и **35, 11**. Линіи эти строятся по точкамъ пересѣченія съ поверхностью кольца лучей, проходящихъ черезъ точки контура собственой тѣни VD и **2J3**.

Въ настоящемъ примѣрѣ было въ общихъ чертахъ сказано о построеніи тѣней падающихъ отъ тѣла на само себя (линіи V **8, 9** и **35, 11**, чертежъ 422). Разсмотримъ теперь этотъ вопросъ на примѣрахъ нѣсколько подробнѣе, хотя по существу онъ не представляетъ новой задачи.

Примѣръ № 7. Построить собственныя и падающія тѣни половины усѣченнаго полаго конуса (черт. 423). Ограничимся рѣшеніемъ этой задачи въ пространствѣ, предлагая читателю рѣшить ее самому въ проекціяхъ, руководствуясь слѣдующимъ примѣромъ 8-мъ рѣшенія аналогичной задачи.



Черт. 423.

Продолжаемъ производящія внутренней поверхности конуса до пересѣченія въ вершинѣ S. Проводимъ черезъ S лучъ и находимъ его слѣдъ S_0 на плоскости основанія конуса. Соединяемъ точки S_0 и D.

Линія DG будетъ тѣнью, падающей отъ производящей AD на H. Соединяемъ точки S и G и проведемъ черезъ A лучъ до пересѣченія съ SG въ точкѣ I. Линія IG будетъ тѣнью, падающей отъ производящей AD на внутреннюю поверхность конуса. Далѣе, изъ точки S_0 проводимъ линію S_0F, касательную къ внутреннему полукругу основанія въ точкѣ F. Соединяемъ F съ S и находимъ точку C, пересѣченія FS съ верхнимъ внутреннимъ полукругомъ. Точка C будетъ служить началомъ тѣни, падающей отъ дуги AC на внутреннюю поверхность конуса. Построимъ тѣнь отъ какой нибудь точки B этой дуги. Проводимъ производящую SBE. Соединяемъ E съ S_0 и замѣчаемъ точку L пересѣченія ES_0 съ внутреннимъ полукругомъ основанія. Искомая тѣнь опредѣлится въ точкѣ K пересѣченія луча BK съ производящей SL. Остальныя точки кривой CKI строятся подобнымъ же образомъ.

Контуръ тѣни, падающей отъ конуса на H, будетъ строиться по общимъ правиламъ, разсмотрѣннымъ въ предыдущихъ примѣрахъ.

Примѣръ 8-й. Построить собственныя и падающія тѣни половины полаго конуса, стоящаго вершиною на H (черт. 424).

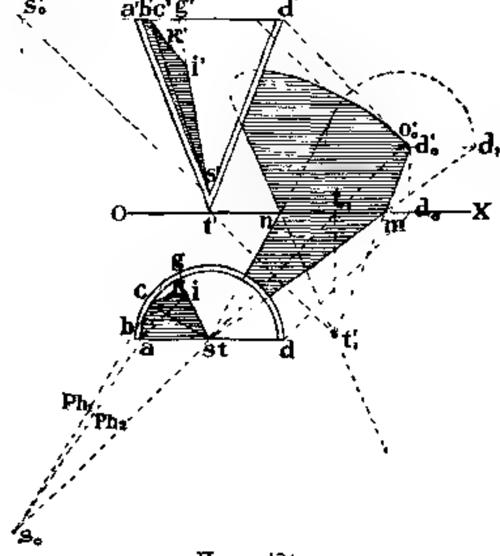
Построимъ сначала контуръ собственной тѣни на внутренней поверхности конуса. Проведемъ изъ вершины S внутренней поверхности конуса

лучъ и найдемъ его пересѣченіе S_0 съ плоскостью основанія конуса. Изъ S_0 проводимъ касательную Ph_1 къ внутреннему полукругу въ точкѣ C и соединяемъ C съ S. Линія CS и будетъ контуръ собственной тѣни внутренней поверхности конуса. Построимъ теперь тѣнь, падающую на ту же поверхность отъ производящей AS. Соединяемъ точки A и S_0 прямою Ph_2, которая будетъ представлять слѣдъ на плоскости основанія конуса плоскости P, проходящей черезъ лучъ SS_0 и точку A.

Найдемъ точку G пересѣченія Ph_2 съ внутреннимъ полукругомъ и соединимъ G съ S. Тѣнь отъ A на поверхность конуса будетъ въ точкѣ I пересѣченія луча AI съ производящей GS.

Линія же IS будетъ служить тѣнью отъ AS на внутреннюю поверхность конуса. Построимъ теперь тѣнь, падающую на ту же поверхность отъ дуги ABC внутренняго полукруга.

Тѣнь K отъ любой точки B этой дуги строится такъ же, какъ и отъ точки A. Построивъ рядъ точекъ падающей тѣни, соединимъ ихъ плавной кривой CKI.



Черт. 424.

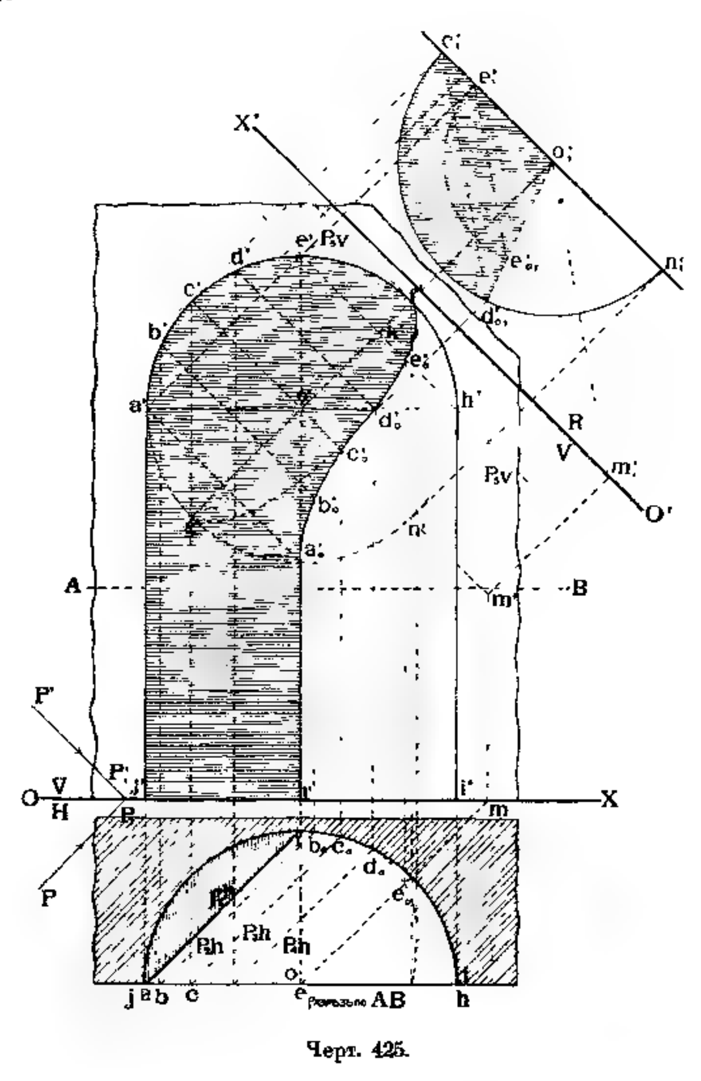
Тѣни, падающія отъ конуса на V и H строятся по общимъ правиламъ (см. примѣръ 2-й, стр. 268). На чертежѣ показаны эти построенія, объяснить которыя предоставляемъ читателю.

Примѣръ 9-й. Построить тѣни въ нишѣ (черт. 425).

Въ этомъ примѣрѣ рѣшеніе задачи заключается въ нахожденіи точекъ пересѣченія лучей, проходящихъ черезъ прямое AJ и круговое AH ребра ниша съ внутренними ея поверхностями: цилиндрическою $AHIJ$ и сферическою — AEH.

Найдемъ сначала тѣнь, падающую на цилиндръ отъ ребра AJ. Для этого проводимъ черезъ AJ плоскость P_1 и строимъ линію сѣченія ея съ H и съ цилиндромъ. Тѣнью отъ AJ будутъ линіи $j1$ и $1'a_0'$. Далѣе строимъ тѣнь на цилиндръ отъ кругового ребра AEH ниши. Выбираемъ на этомъ ребрѣ рядъ точекъ B, C...., проводимъ черезъ нихъ лучи и находимъ пересѣченіе ихъ b_0', c_0' и т. д. съ цилиндромъ. Кривая линія a_0', b_0', c_0'. d_0'... и будетъ тѣнью отъ дуги $ABCD$ круга на цилиндръ. Начн-

ная отъ точки d_0' тѣнь начинаетъ падать уже на шаровую поверхность. Для нахожденія этой тѣни приходится искать точки пересѣченія съ шаромъ лучей, проходящихъ черезъ точки остальной части дуги круга *DEF*....



Черт. 425.

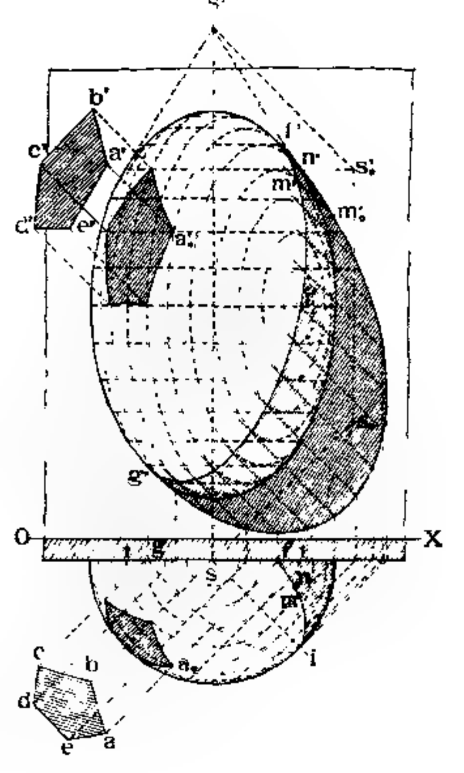
Проводимъ плоскость $P_s \perp V$ и $\parallel PP_1$ касательной къ шару и отмѣтимъ точку касанія P. Въ этой точкѣ будетъ начинаться контуръ падающей на шаръ тѣни. Выберемъ на дугѣ DF какую нибудь точку E, проведемъ черезъ нее лучъ и найдемъ точку пересѣченія его съ шаромъ (см. стр. 220). Для этого перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{R}$, вы-

бравъ $R \perp H$ и $\parallel PP_1$. Проведемъ лучъ черезъ E и черезъ этотъ лучъ проведемъ плоскость $P_5 \perp V$, которая въ пространствѣ пересѣчетъ шаръ по кругу радіуса $e'k'$; спроектируемъ шаръ, лучъ E и упомянутый кругъ на плоскость R. (На R показаны проекціи линій половины шара и круга, необходимыя для рѣшенія задачи). Точка e_{01}' пересѣченія луча $e_1'e_{01}'$ съ дугою круга $e_1'e_{01}'$ и будетъ искомой. Переносимъ ее въ систему $\frac{V}{H}$.

Подобнымъ же образомъ можно найти еще рядъ точекъ, соединивъ которыя плавной кривой, получимъ контуръ $d_0'f'$ падающей тѣни на шаровую поверхность.

Предоставляемъ читателю доказать, что кривая $d_0'f'$ будетъ дугою эллипса съ осью $g'f'$ [1]).

Примѣръ 10-й. Построить собственныя и падающія тѣни половины эллипсоида, а также тѣни, падающія на него отъ плоскаго пятиугольника $ABCDE$ (черт. 426).



Черт. 426.

Для рѣшенія этой задачи воспользуемся общимъ способомъ, описаннымъ на стр. 266 (черт. 415).

Построимъ сначала тѣни самого эллипсоида. Начальныя точки его собственной тѣни будутъ въ точкахъ F и G касанія его съ плоскостями, параллельными лучу свѣта и перпендикулярными къ V.

Далѣе, контуръ собственной тѣни долженъ проходить черезъ точку I касанія эллипсоида съ плоскостью $\perp H$ и $\parallel$ лучу свѣта. Для построенія остальныхъ точекъ контура собственной тѣни слѣдуетъ проводить плоскости, пересѣкающія эллипсоидъ и $\perp H$, находить линіи (эллипсы) ихъ пересѣченія съ эллипсоидомъ и строить прямыя линіи, касательныя къ найденнымъ эллипсамъ.

Полученныя точки соединяемъ плавной кривой $FMIG$, которая и будетъ контуромъ собственной тѣни. Тѣнь отъ этого контура на плоскость

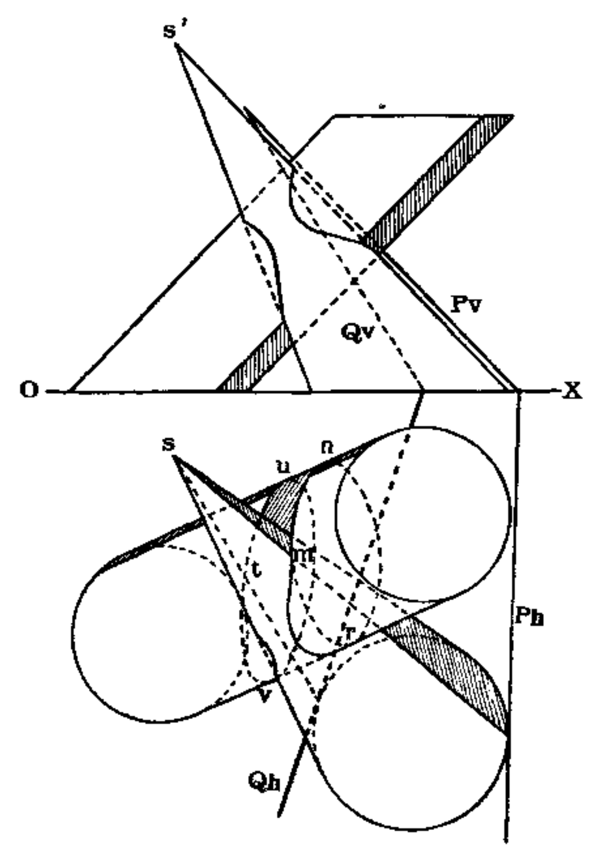
---

[1]) Доказательство слѣдуетъ изъ того, что проекціей этого эллипса на R будетъ прямая $d_{01}'o_1'$.

На черт. 312 показана часть ниши съ тѣнями.

стѣны, къ которой прислоненъ эллипсоидъ, будетъ служить контуромъ падающей тѣни.

Для нахожденія точекъ контура собственной тѣни можно было бы воспользоваться еще и другимъ способомъ, именно, проводя по разнымъ параллелямъ эллипсоида соприкасающіяся коническія, а по экватору, цилиндрическую, поверхности.



Черт. 427.

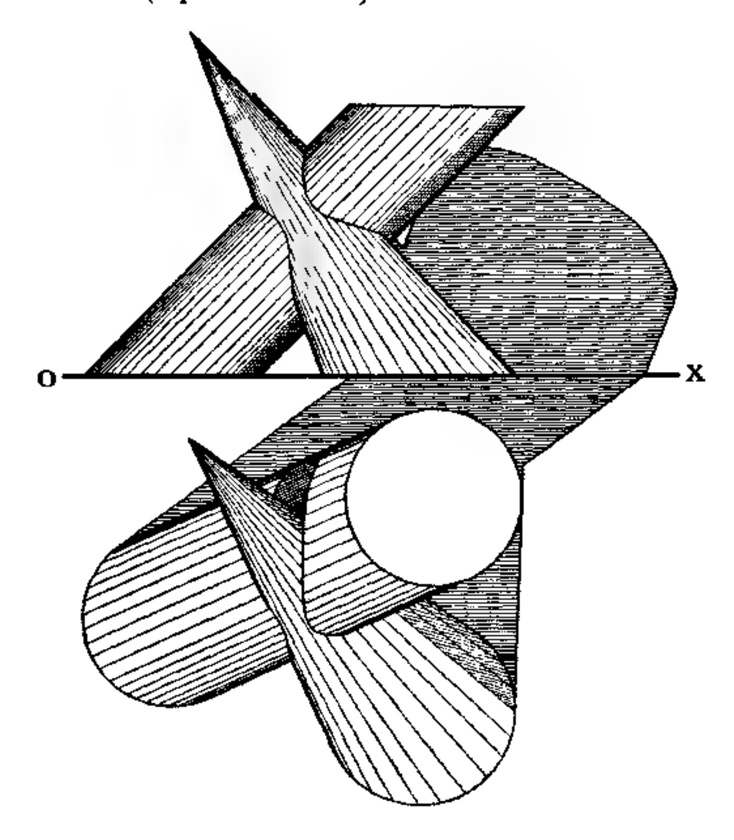
Такая коническая поверхность съ вершиной S проведена для нахожденія точки N. Черезъ вершину S проведемъ лучъ до пересѣченія съ плоскостью взятой параллели въ точкѣ S_0. Изъ S_0 проведена касательная къ параллели 11 въ точкѣ N, которая и будетъ искомой.

Тѣнь, падающая на эллипсоидъ отъ пятиугольника $ABCDE$ строится слѣдующимъ образомъ: проводимъ черезъ вершины и рядъ точекъ контура пятиугольника плоскости $\perp H$ и находимъ эллипсы ихъ пересѣченія съ эллипсоидомъ.

Тогда точки пересѣченія этихъ эллипсовъ съ соотвѣтствующими лучами будутъ принадлежать контуру тѣни, падающей на эллипсоидъ.

Примѣръ 11-й. Построить тѣни, падующія отъ конуса на цилиндръ (черт. 427).

Цилиндръ и конусъ нами взяты тѣ же, для которыхъ ранѣе были построены линіи сѣченія (черт. 367 и 368) и собственныя и падающія на V и H тѣни (черт. 418 и 420).

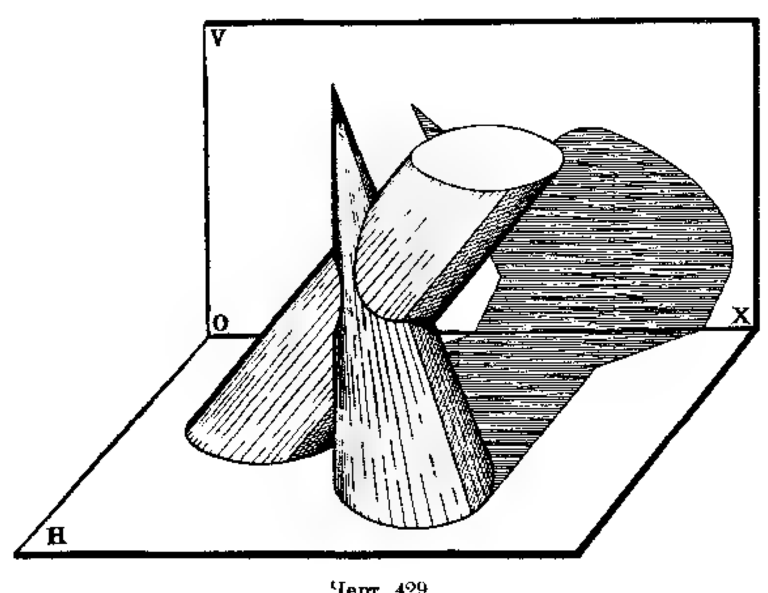


Черт. 428.

Чтобы построить тѣни, падающія отъ конуса на цилиндръ, слѣдуетъ найти линіи сѣченія цилиндра съ двумя плоскостями P и Q, касательными въ конусу и параллельными лучамъ свѣта. Таковыми линіями яаляются эллипсы mnr и tnr. Видимая въ проекціи на H часть тѣни, падающей отъ конуса на цилиндръ, заштрихована.

На черт. 428 показанъ общій видъ пересѣкающихся конуса и цилиндра съ тѣнями. Чертежъ этотъ состааленъ изъ чертежей... 418, 420 и 427).

На черт. 429 изображены модели плоскостей проекцій и пересѣкающихся поверхностей, причемъ послѣднія склеены по разверткамъ конуса и цилиндра (черт. 387 и 388) и освѣщенны лучами свѣта, параллельными принятому направленію.



Черт 429

Кромѣ разобранныхъ примѣровъ, на чертежахъ 259, 260, 269, 298, 315, 324, 325, 326, 327, 335, 338, 339 показанъ еще рядъ изображеній различныхъ поверхностей съ тѣнями.

Читателю предлагается самому, въ видѣ упражненія, возстановить построенія для полученія контуровъ этихъ тѣней.

Задача № 31.

Построить собственныя и падающія тѣни вазы (черт. 430).

Рѣшеніе

Заданное тѣло состоитъ изъ ряда отдѣльныхъ поверхностей, которыя на чертежѣ обозначены римскими цифрами I—X. Всю задачу можно раздѣлить на рядъ отдѣльныхъ задачъ, каковыя слѣдуетъ рѣшать отдѣльно.

Сначала опредѣляемъ собственныя тѣни цилиндровъ I и VII такъ, какъ это было объяснено на стр. 269 (черт. 419). Далѣе строимъ собственныя тѣни кольцевыхъ поверхностей II и VIII, какъ это было объяснено на стр. 272 (черт. 42‹). Затѣмъ строимъ собственную тѣнь на поверхности IV такъ, какъ было объяснено на стр. 277 (черт. 426) и на стр. 272 (черт. 422).

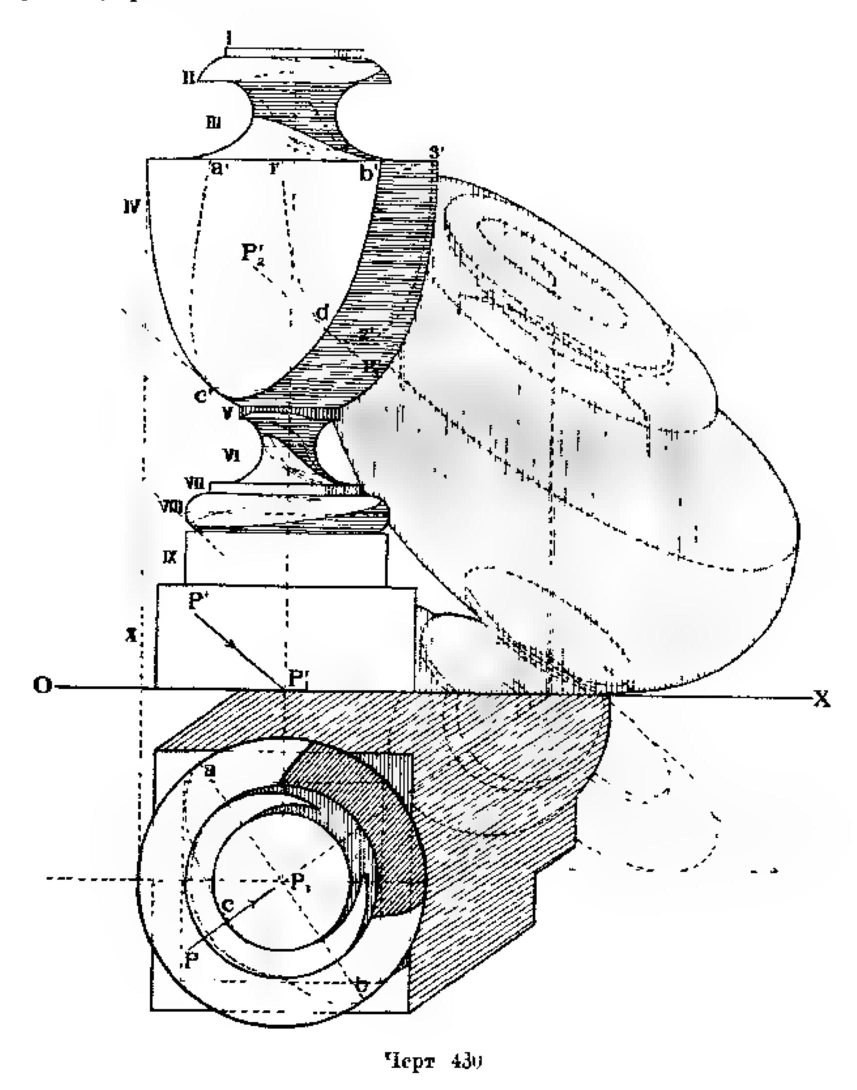
Далѣе строимъ тѣни, падающія отъ основанія кольца II на поверхность вращенія III и отъ основанія цилиндра V на поверхность VI такъ, какъ это было показано на стр. 277 (черт. 426), гдѣ была построена тѣнь отъ пятиугольника на эллипсоидъ.

Наконецъ строимъ тѣнь, падающую отъ поверхности IV на цилиндръ V.

Построивъ контуры всѣхъ собственныхъ тѣней, строимъ контуръ падающей тѣни на V и H, какъ тѣнь отъ контура собственной тѣни.

Задача № 32

Построить собственныя и падающія тѣни капители тосканской полуколонны (черт. 431), прислоненной къ стѣнѣ



Черт. 430

Рѣшеніе.

Поверхность данной колонны можно расчленить на рядъ отдѣльныхъ поверхностей, обозначенныхъ на чертежѣ римскими цифрами I—VIII.

Планъ рѣшенія задачи будетъ заключаться въ слѣдующемъ.

1. Построеніе собственныхъ тѣней каждой поверхности

2. Построеніе падающихъ тѣней отъ одной поверхности на другую

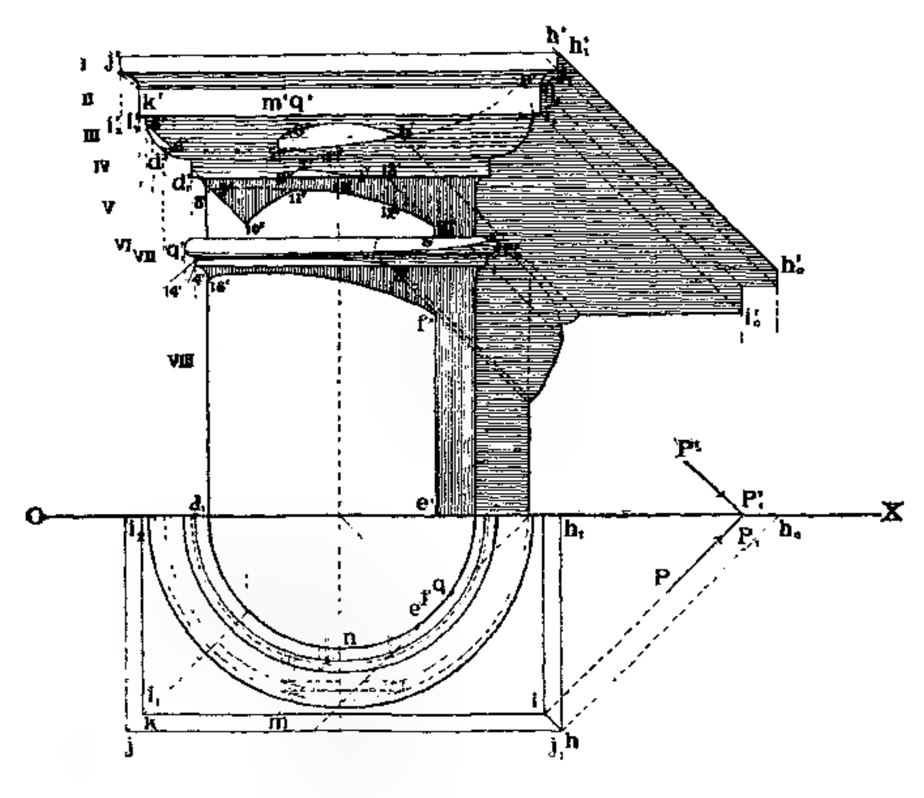
3. Построеніе тѣней, падающихъ на V и H.

Построеніе тѣней для каждой изъ восьми поверхностей производится согласно ранѣе объясненныхъ примѣровъ.

Скажемъ лишь нѣсколько словъ о томъ, какъ строится тѣнь, падающая отъ какой нибудь точки M ребра поверхности II на поверхность III.

Проводимъ черезъ M плоскость $\perp V$ и $\parallel$ лучу PP_1

Строимъ кривую MR (вертикальная проекція ея $m'r'$) сѣченія этой плоскости съ поверхностью III и замѣчаемъ точку O пересѣченія луча MN съ этой кривой. Точка O и будетъ искомою тѣнью.



Черт. 431.

На чертежѣ показаны слѣдующіе контуры собственныхъ тѣней:

Поверхности.	Контуры.
I	HH_1, HJ_1, J_1J.
II	LI, II_1, I_1I_2.
III	$ABCD$.
IV	12 и часть дуги у точки D_1.
V	GS.
VI	R_1Q_1.
VII	34.
VIII	EF

Контуры тѣней, падающихъ на поверхность колонны:

Контуры падающихъ тѣней.	Контуры собственныхъ тѣней, отъ которыхъ падаютъ тѣни.
KL	JJ_1.
5 6	I_1I_2.
COB	II_1.
27	II_1.
71	CB.
89	CD
9. 10	II_1.
10, 11	II_1.
11, 12	2, 1.
12, G	1, 13.
14, 3	Q_1 R_1
16, F	4, 3.

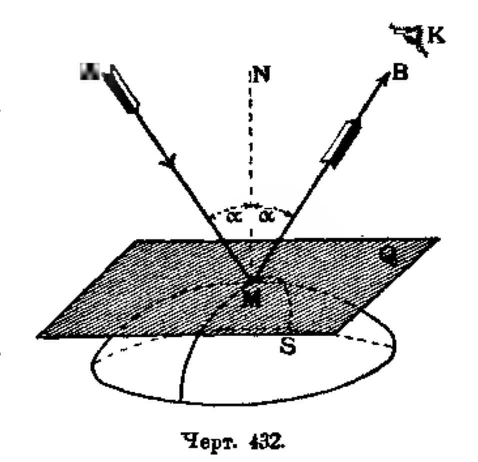
Наконецъ, на V построены тѣни, падающія отъ контуровъ собственныхъ тѣней колонны.

c) *Элементы физической теоріи тѣней.*

Въ началѣ этого параграфа а также въ § 15 мы разсматривали построеніе собственныхъ и падающихъ тѣней исключительно съ геометрической точки зрѣнія не касаясь физической стороны явленія. Съ этой точки зрѣнія рѣшеніе задачи сводилось къ нахожденію линій касанія данныхъ поверхностей съ цилиндрическими поверхностями, обертывающими ихъ и параллельными лучамъ свѣта. Эти линіи служили контурами собственныхъ тѣней.

Построеніе же контуровъ падающихъ тѣней сводилось къ задачѣ на построеніе линій сѣченія поверхностей.

Такая постановка задачи является достаточной при исполненіи обыкновенныхъ техническихъ чертежей, въ которыхъ тѣни придаютъ бо́льшую наглядность изображенія.



Черт. 432.

При исполненіи же художественныхъ чертежей фасадовъ зданій, деталей художественной обработки комнатъ и т. п., иногда приходится прибѣгать къ оттѣненію и растушевкѣ поверхностей, изображая ихъ тѣни такими, какими онѣ бываютъ въ дѣйствительности, или какими онѣ кажутся глазу.

Оттѣненія эти часто изображаются на глазъ, какъ это дѣлаютъ художники при рисованіи съ натуры.

Изложимъ нѣкоторые элементы физической теоріи тѣней [1]).

---

[1]) Подробности см. 1) Н. Рынинъ «Дневной свѣтъ» СПБ. 1908 г.

2) A. Göller «Lehrbuch der Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde». Stuttgard.

3) H. Goodwin «Architectural shades and shadows». Boston. 1904.

4) J. Adhémar «Ombres». Paris. 1874. 4-me ed.

5) А. Редеръ «Теорія тѣней». СПБ. 1858.

1. Лучъ *AM*, падающій въ какой-нибудь точкѣ *M* (черт. 432) на поверхность *S* и лучъ *MB* отраженый лежатъ въ одной плоскости съ нормалью *MN* къ поверхности въ этой точкѣ.

2 Уголъ α паденія равенъ углу α отраженія.

3. Освѣщенность (*e*) данной точки поверхности пропорціональна косинусу угла α паденія и обратно пропорціональна квадратамъ разстоянія *R* освѣщенной точки отъ источника свѣта. Если обозначить силу источника свѣта черезъ *J*, то освѣщенность точки *M* выразится формулой.

$$e = \frac{J}{R^2} \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Освѣщенность эта измѣряется въ направленіи нормали *MN* къ поверхности и называется *дѣйствительной освѣщенностью* точки *M*

На чертежахъ обыкновенно и изображаютъ тѣни соотвѣтственно дѣйствительной освѣщенности разныхъ точекъ поверхностей.

На картинахъ же изображаютъ не дѣйствительную а *кажущуюся освѣщенность* точекъ, т. е. такую, каковою освѣщенность точки кажется наблюдателю.

Предположимъ, что въ точкѣ *K*, находящейся отъ точки *M* въ разстояніи *r*, помѣщенъ глазъ наблюдателя *K*.

Если поверхность *S* полированная, то лучъ *AM*, отразившись по направленію *MB*, не попадетъ въ глазъ *K*, и наблюдателю будетъ казаться, что поверхность *S* не освѣщена.

Если же поверхность матовая или шероховатая, то лучъ, попадая въ точку *M*, разсѣется по разнымъ направленіямъ, причемъ часть силы свѣта поглотится поверхностью, а разсѣется нѣкоторая доля e_1 падающаго свѣта, причемъ

$$e_1 = ke.$$

Величина *k* называется коэффиціентомъ разсѣянія, и она всегда меньше единицы.

Лучъ, попадающій въ глазъ *K*, будетъ имѣть силу

$$e_2 = \frac{e_1}{r^2} = \frac{ke}{r^2} = \frac{k \,.\, J \,.\, \cos\alpha}{R^2 \,.\, r^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Такимъ образомъ точка *M*, имѣющая дѣйствительную освѣщенность *e*, будетъ казаться глазу *K* освѣщенности $e_1 = ke < e$.

Кромѣ того, въ зависимости отъ состоянія атмосферы между глазомъ и точкой *M*, эта освѣщенность можетъ казаться еще меньше.

Точки поверхности, обладающіе наибольшей дѣйствительной освѣщенностью, могутъ казаться менѣе освѣщенными, нежели другія, и наоборотъ.

Вопросы кажущейся освѣщенности мы предполагаемъ изложить въ курсѣ перспективы.

Здѣсь же мы разсмотримъ лишь вопросы, относящіеся къ дѣйствительной освѣщенности.

При освѣщеніи небольшой поверхности параллельными лучами солнечнаго свѣта можно предположить, что всѣ лучи подходитъ къ поверхности съ одинаковой силою *J*. Тогда въ формулѣ 1-й исключится вліяніе *R*, и она приметъ видъ.

$$e = J \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Если мы опредѣлимъ освѣщенность разныхъ точекъ поверхности, то можно соединить между собою плавными кривыми линіями точки, имѣющую одинаковую освѣщенность.

Такія линіи называются *линіями равной освѣщенности* (*изофоты*).

На черт. 433, изображенъ разрѣзъ шара плоскостью T, проходящая черезъ его центръ и параллельной лучу PP_1. Линія равной освѣщенности шара спроектируются на плоскость T въ линіи $ab, cd, \ldots \perp PP$. Углы паденія лучей по этимъ линіямъ на шарѣ будутъ равны угламъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 90° между радіусами шара $ob, od \ldots$ и лучами, проходящими черезъ точки b, d, и т. д.

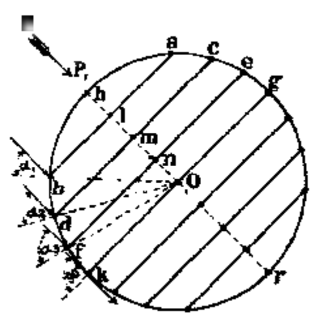
Освѣщенности точекъ h, b, d.. будутъ равны

h	J.
b	$J \cos \alpha_1$
d	$J \cos \alpha_2$
k	$J \cos 90° = 0$.

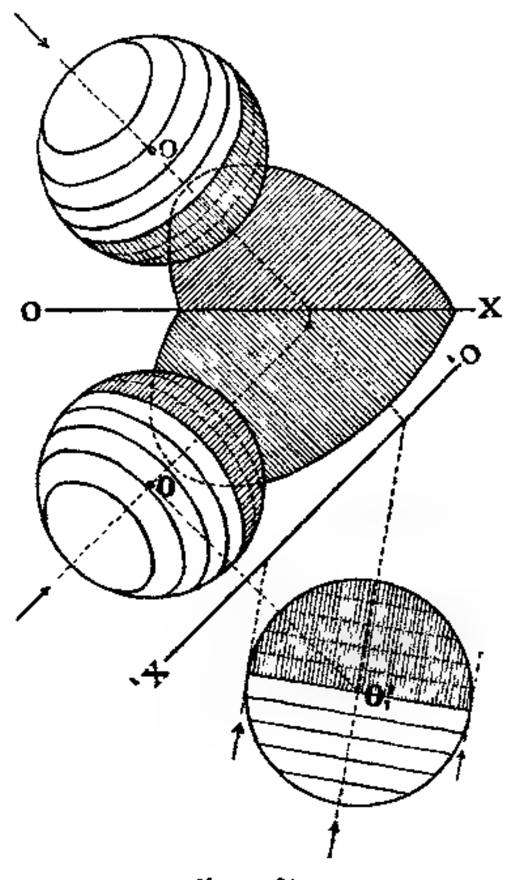
На черт. 434 показаны проекціи шара съ изображеніями линій равной освѣщенности.

Если сзади шара находится какая нибудь плоскость или поверхность, отражающая свѣтъ съ коэффиціентомъ разсѣянія k, то задняя часть шара также будетъ освѣщена, хотя гораздо слабѣе, чѣмъ передняя, приблизительно на величину k. Можно и для задней части построить линіи равной освѣщенности.

Если неосвѣщенныя части шара покрывать краской опредѣленной густоты, освѣщенныя совсѣмъ не закрашивать, а остальныя части закрашивать тонами густоты пропорціональной ихъ освѣщенности, то проекціи шара изобразятся, какъ это показано на черт. 435.



Черт. 433.



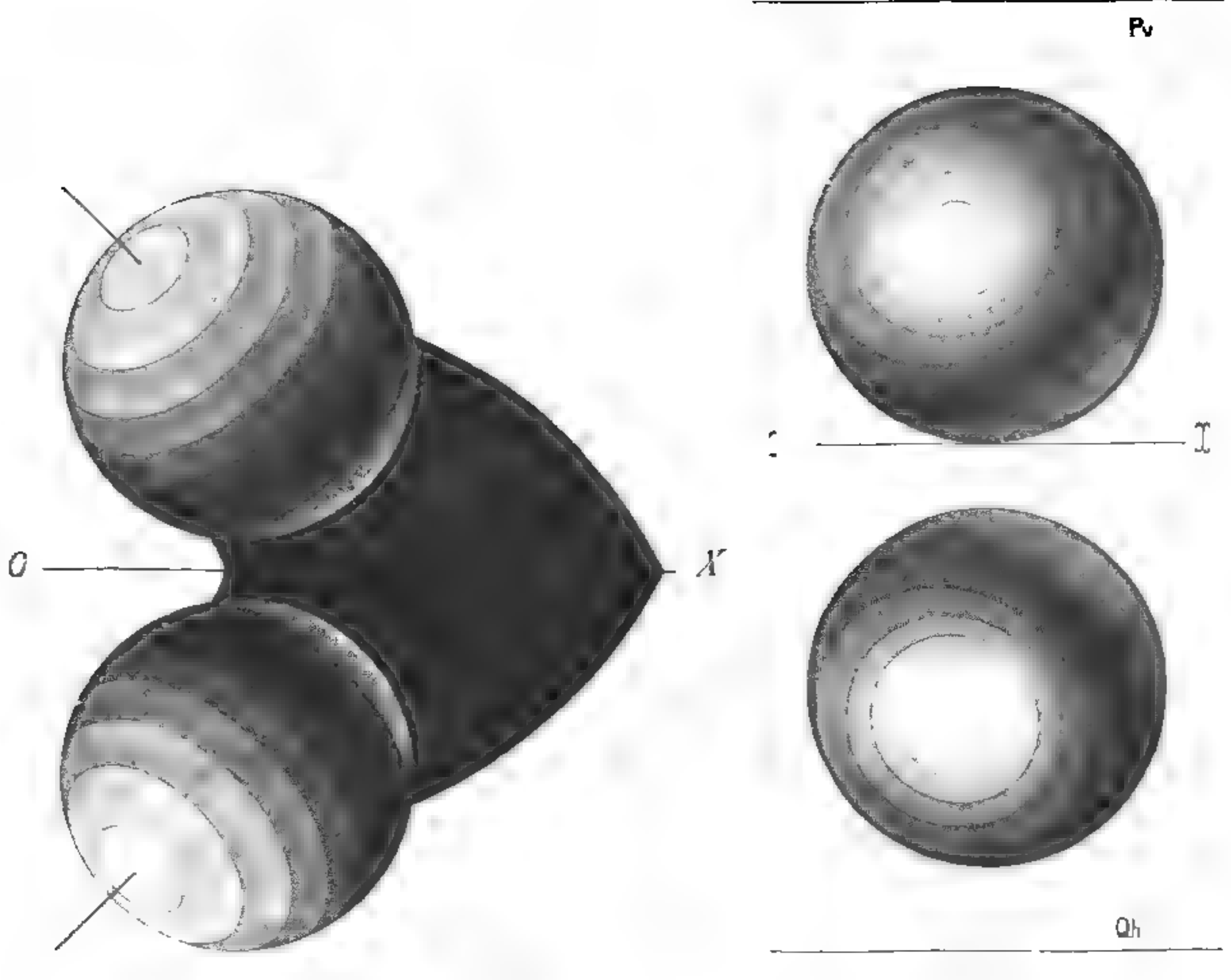
Черт. 434.

Линіи равной освѣщенности замѣнены площадками равной освѣщенности, что соотвѣтствуетъ замѣнѣ шара вписаннымъ въ него многогранникомъ, составленнымъ изъ ряда коническихъ поверхностей, ось которыхъ проходитъ черезъ центръ шара и параллельна лучу, а основаніями которыхъ служатъ линіи равныхъ освѣщенностей.

При этомъ предполагается, что плоскости V и H отражаютъ свѣтъ.

На чертежѣ 310 показанъ общій видъ шаръ съ линіями равной освѣщенности.

На черт. 436 тотъ же шаръ изображенъ съ показаніемъ линіи видимой, а не дѣйствительной, освѣщенности. Линія эти построены въ предположеніи, что шаръ разсматривается изъ точекъ зрѣнія, расположенныхъ въ плоскости P для проекціи на H или въ плоскости Q для проекціи на V. Видимая или кажущаяся освѣщенность каждой точки шара опредѣлялась по формулѣ (2-й), гдѣ r будетъ выражать разстоянія точекъ шара до плоскостей P или Q; отраженные отъ шара лучи всѣ предполагаются перпендикулярными къ P или къ Q. Чѣмъ дальше плоскости P и Q, въ которыхъ предполагаются расположенными точки зрѣнія, будутъ удалены отъ шара, тѣмъ больше кажущаяся освѣщенность его будетъ приближаться къ дѣйствительной.



Черт. 435. Черт. 436.

На черт. 437, для сравненія съ чертежами 435 и 436, изображены два шара съ показаніемъ собственныхъ и падающихъ тѣней, построенныхъ согласно правилъ, изложенныхъ въ § 22 (b), не принимая во вниманія физической стороны явленія.

Если дана поверхность случайнаго вида, то для построенія линій равной освѣщенности слѣдуетъ въ разныхъ точкахъ ея проводить нормали къ ней и опредѣлять углы между этими нормалями и направленіями лучей свѣта.

Соединяя между собой точки, у которыхъ эти углы одинаковы, мы и получимъ линіи равныхъ освѣщенностей.

На чертежахъ 283, 310, 320, 323, 331, 334, 340 приведенъ рядъ примѣровъ съ изображеніями линій равной освѣщенности для различныхъ поверхностей, причемъ площадки между каждой парой таковыхъ линій закрашены однимъ и тѣмъ же соотвѣтственнымъ тономъ.

На черт. 438 изображены база и капитель колонны съ показаніемъ линій равной освѣщенности и съ закраской поверхностей разными тонами по поясамъ равной освѣщенности безъ отмывки и тушеванія.



Черт. 437.

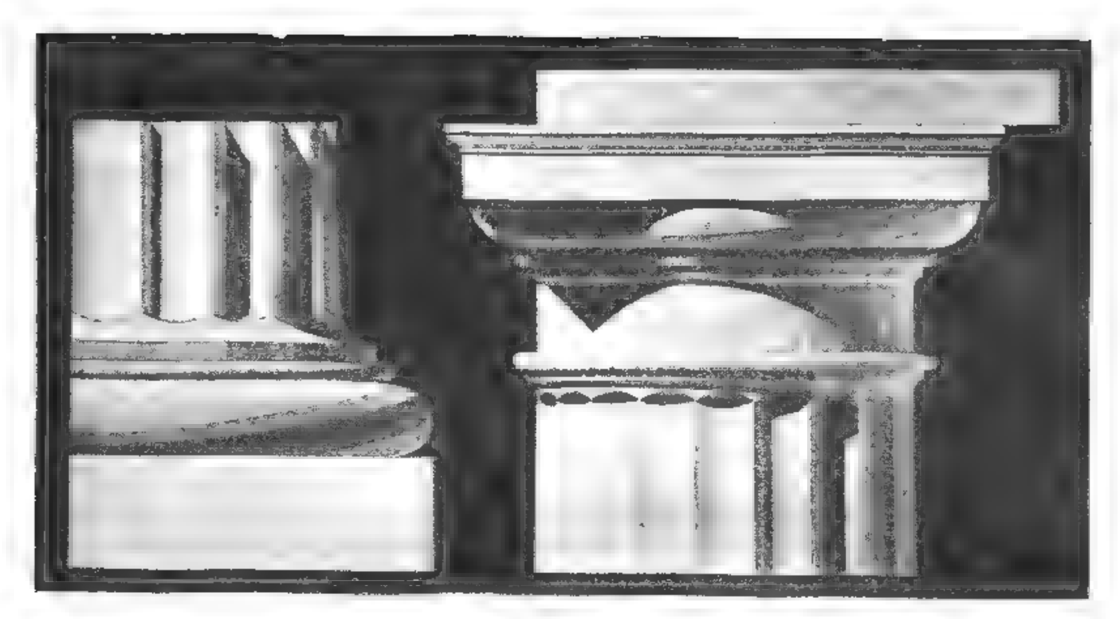
При рисованіи карандашемъ или при отмывкѣ чертежа кистью представляется возможнымъ сгладить границы между поясами разной освѣщенности, дѣлая тушевку или отмывку тѣней.

На чертежѣ 439 изображенъ шаръ съ оттушевкой его тѣней.

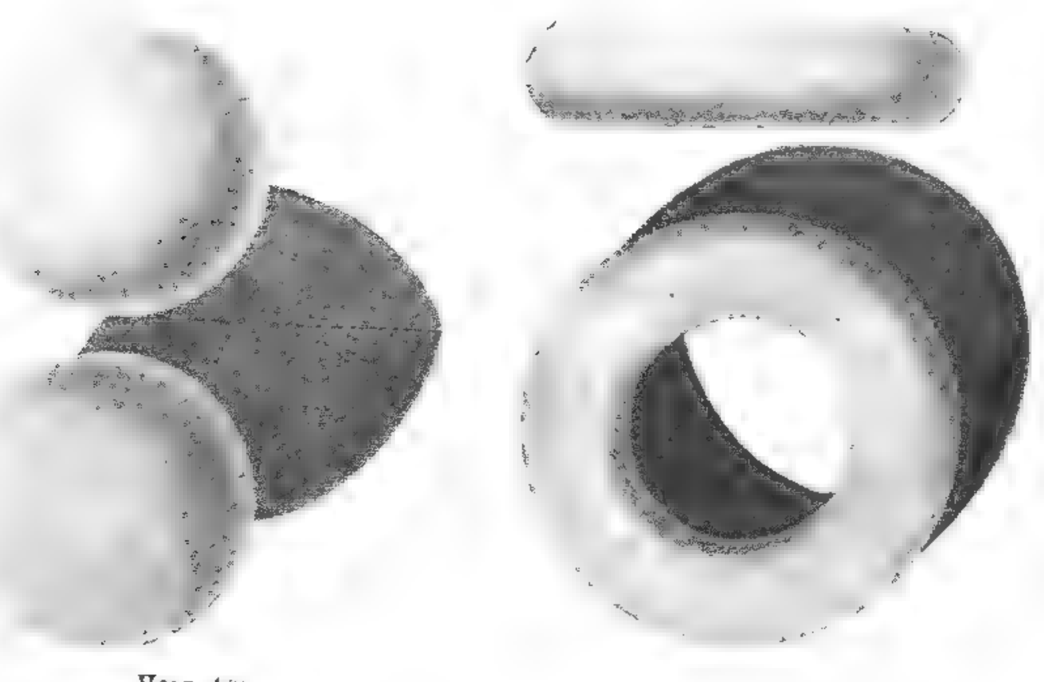
На черт. 440 изображено кольцо съ такою же тушевкой.

На черт. 441 изображены два цилиндрическихъ пересѣкающихся фланца въ фасадѣ и въ разрѣзѣ.

На чертежахъ 442 и 443 показаны собственныя и падающія тѣни для капители и базы колоннъ Іоническаго (черт. 442) и Коринѳскаго (черт. 443) ордеровъ. Изображенія эти были получены при помощи фотографированія моделей, освѣщен-



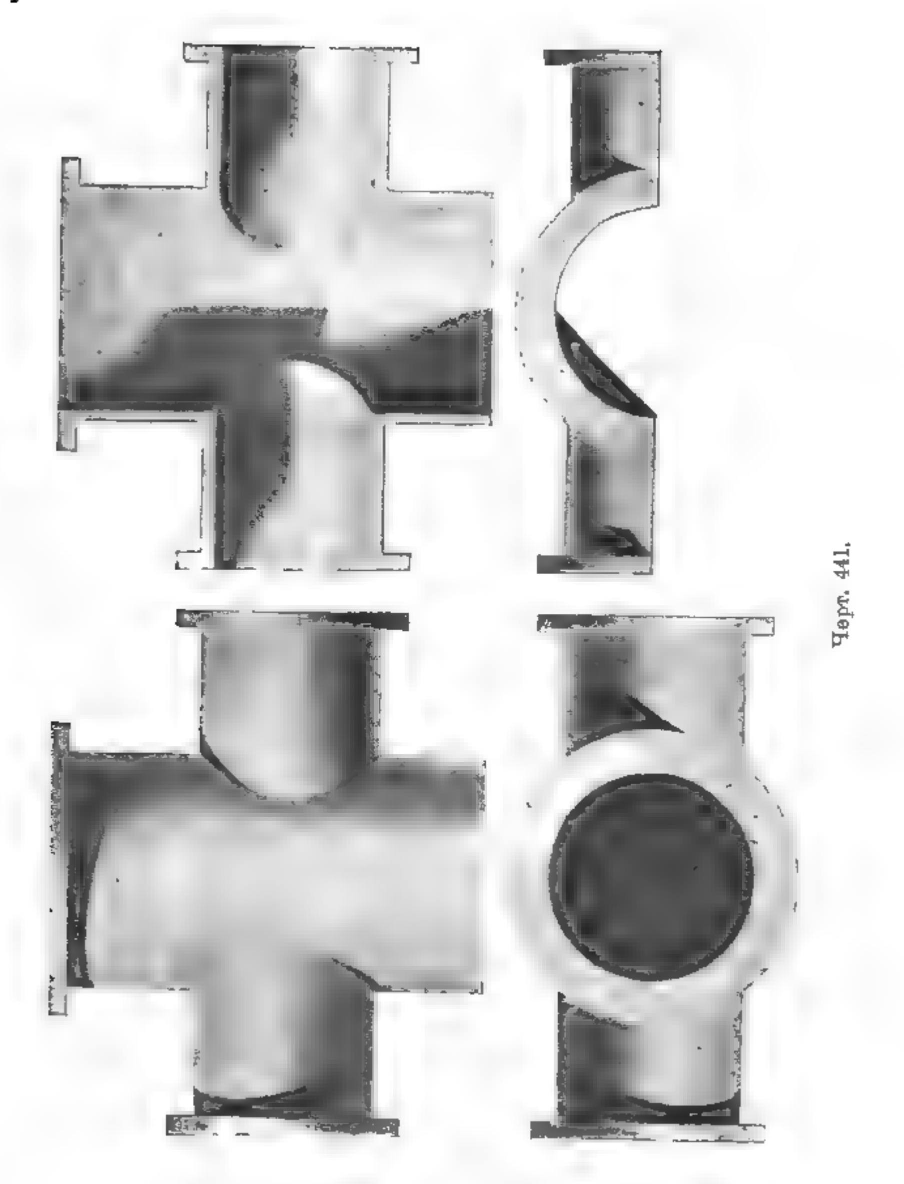
Черт. 438.



Черт. 439. Черт. 440.

ныхъ лучами солнца, параллельными принятому ихъ направленію относительно плоскостей проекціи.

Заканчивая этотъ параграфъ, упомянемъ еще о такъ называемыхъ *блестящихъ точкахъ и линіяхъ*, которыя наблюдаются на хорошо полированныхъ поверхностяхъ.



Черт. 441.

Блестящей точкой на полированной поверхности называется такая точка, въ которой падающій лучъ свѣта и лучъ, отраженный къ глазу наблюдателя, составляютъ одинаковые углы съ нормалью къ поверхности въ данной точкѣ. *Блестящей линіей* поверхности называется геометрическое мѣсто блестящихъ точекъ ея.



Черт. 442.



Черт. 443.

При построеніи блестящихъ точекъ и линій полированныхъ поверхностей въ ортогональныхъ проекціяхъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что эти точки и линіи будутъ разныя соотвѣтственно направленію лучей зрѣнія перпендикулярно къ V или перпендикулярно къ H. Въ первомъ случаѣ отраженные лучи должны идти $\perp V$, а во второмъ $\perp H$.

§ 23. Геометрическія мѣста.

Геометрическимъ мѣстомъ называется геометрическая система, элементы которой удовлетворяютъ одному или нѣсколькимъ опредѣленнымъ геометрическимъ условіямъ.

Разсмотримъ простѣйшія геометрическія мѣста.

Прямая линія есть геометрическое мѣсто точекъ, которыя могутъ удовлетворять извѣстнымъ геометрическимъ условіямъ, напримѣръ, биссектрисса угла есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ его сторонъ. Перпендикуляръ, возстановленный къ прямолинейному отрѣзку въ серединѣ послѣдняго, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ концовъ этого отрѣзка, и т. д.

Плоскость можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто или точекъ, или прямыхъ линій, удовлетворяющихъ цѣлому ряду условій. Напримѣръ, плоскость P, параллельная плоскости Q и удаленная отъ послѣдней на разстояніи a, есть: 1) геометрическое мѣсто точекъ, удаленныхъ отъ плоскости Q на разстояніе a, 2) геометрическое мѣсто прямыхъ линій, параллельныхъ Q и удаленныхъ отъ Q на разстояніе a.

Плоскость, перпендикулярная къ нѣкоторому отрѣзку прямой линіи AB и проведенная черезъ середину AB, есть геометрическое мѣсто: 1) точекъ, равноудаленныхъ отъ концовъ A и B отрѣзка или 2) линій, перпендикулярныхъ къ данному отрѣзку и т. д.

Шаръ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ данной точки, центра шара. Всякая плоскость, касательная къ шару, будетъ удалена отъ центра его на одно и то же разстояніе, равное радіусу шара.

Прямой круговой цилиндръ есть геометрическое мѣсто: 1) точекъ, удаленныхъ отъ данной прямой, оси цилиндра, на данное разстояніе, 2) прямыхъ линій, параллельныхъ данной оси цилиндра и удаленныхъ отъ нея на данное разстояніе.

Всякая плоскость, касательная къ такому цилиндру, будетъ удалена отъ оси его на одно и то же разстояніе, равное радіусу цилиндра, и будетъ параллельна оси цилиндра или линіямъ, параллельнымъ этой оси.

Прямой круговой конусъ есть геометрическое мѣсто прямыхъ линій, наклоненныхъ къ данной линіи, оси конуса, подъ даннымъ угломъ α. Въ частности, если мы проведемъ плоскость, перпендикулярную къ оси конуса, то его поверхность будетъ служить геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линій, наклоненныхъ подъ даннымъ угломъ $90^\circ-\alpha$ къ данной плоскости.

Всякая плоскость, касательная къ такому конусу, будетъ наклонена къ оси его или къ линіямъ, параллельнымъ этой оси, подъ угломъ α. Въ то же время всякая такая касательная плоскость будетъ наклонена къ плоскости, перпендикулярной къ оси конуса, подъ угломъ $90^\circ-\alpha$.

Въ зависимости отъ числа и характера условій, опредѣляющихъ различные геометрическіе элементы, послѣдніе можно разсматривать какъ результаты построеній, произведенныхъ сочетаніями различныхъ геометрическихъ мѣстъ, каждое изъ которыхъ удовлетворяетъ одному изъ заданныхъ условій.

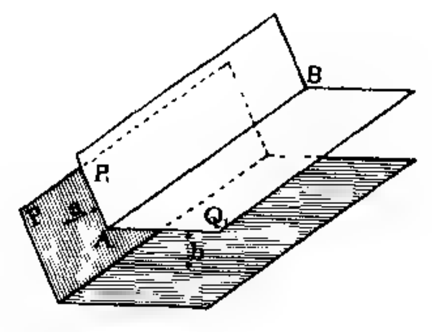
Въ виду разнообразія и многочисленности комбинацій геометрическихъ мѣстъ, разсмотримъ лишь нѣкоторыя изъ нихъ на примѣрахъ рѣшенія задачъ, причемъ

послѣднія будемъ рѣшать сначала въ пространствѣ, а потомъ укажемъ планъ рѣшенія ихъ въ проекціяхъ.

Задача № 33. Даны двѣ плоскости P и Q. Требуется провести линію, параллельную имъ и въ разстояніи a отъ P и b отъ Q (черт. 444).

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ. Проводимъ плоскость P_1, параллельную P въ разстояніи a отъ нея. Эта плоскость будетъ служить геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линій, удовлетворяющихъ одному изъ заданныхъ условій.

Подобнымъ же образомъ проводимъ плоскость Q_1, параллельную Q, на разстояніи b отъ нея. Всякая прямая, лежащая въ этой плоскости, будетъ удовлетворять второму изъ заданныхъ условій. Очевидно, линія AB пересѣченія плоскостей P_1 и Q_1 будетъ искомой линіей, удовлетворяющей обоимъ заданнымъ условіямъ.



Черт. 444.

Рѣшеніе задачи въ проекціяхъ будутъ заключаться въ слѣдующемъ:

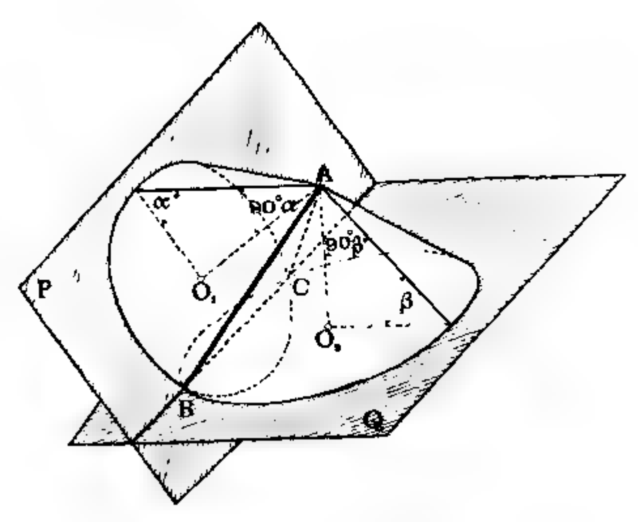
1) Проводимъ плоскость P_1, параллельную P на разстояніи a нея. Для этого:

a) задаемся въ плоскости P какой нибудь точкою M,

b) возстанавливаемъ въ точкѣ M перпендикуляръ къ плоскости P,

c) откладываемъ на этомъ перпендикулярѣ отъ точки M отрѣзокъ $MN = a$,

d) проводимъ черезъ точку N двѣ какихъ нибудь линіи NK и NL, параллельныя плоскости P, напримѣръ, параллельныя слѣдамъ Pv и Ph плоскости P. Линіи NK и NL и опредѣлять искомую плоскость P_1.



Черт. 445.

2) Подобнымъ же образомъ проводимъ плоскость Q_1, параллельную плоскости Q въ разстояніи b отъ нея

3) Находимъ линіи сѣченія плоскостей P_1 и Q_1.

Изслѣдованіе задачи будетъ заключаться въ опредѣленіи числа рѣшеній. Въ

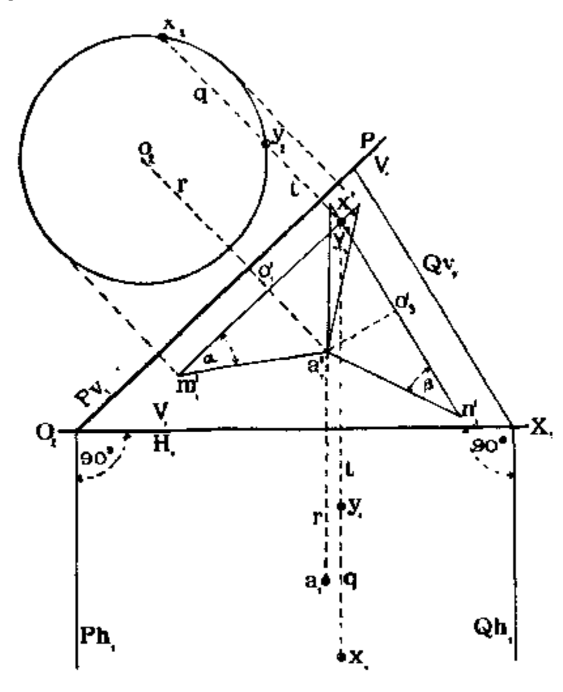
данномъ случаѣ, очевидно, будетъ четыре рѣшенія, въ зависимости отъ того, съ какой стороны данныхъ плоскостей мы будемъ проводить плоскости P_1 и Q_1.

Задача № 34. Провести черезъ данную точку A прямую линію подъ угломъ α къ данной плоскости P и подъ угломъ β къ данной плоскости Q (черт. 445).

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ.

Изъ точки A опускаемъ перпендикуляры AO_1 и AO_2 на плоскости P и Q.

Принимая эти перпендикуляры за оси конусовъ съ вершиною въ A, описываемъ вокругъ нихъ эти конусы, одинъ вокругъ оси AO_1 съ угломъ между осью и производящими $90°-\alpha$ и другой вокругъ оси AO_2 съ угломъ $90°-\alpha$. Очевидно, линіи AB и AC сѣченія поверхностей этихъ конусовъ будутъ удовлетворять обоимъ заданнымъ условіямъ.



Черт. 446.

Рѣшенія задачи въ проекціяхъ.

Если плоскости P и Q заданы случайно, то прежде всего, при помощи методовъ вращенія или перемѣны плоскостей проекцій, переходимъ къ наиболѣе выгодному ихъ заданію, напримѣръ, къ такому, при которомъ линія ихъ сѣченія перпендикулярна къ новой плоскости проекцій (черт. 446) и находимъ въ этой системѣ $\frac{V_1}{H_1}$ проекціи точки A ($a_1a'_1$). Строимъ проекціи на V_1 двухъ вышеупомянутыхъ конусовъ, имѣя въ виду, что углы наклона ихъ производящихъ отдѣльно къ плоскостямъ P и Q спроектируются на V_1 безъ искаженія. Выбираемъ высоты AO_1 и AO_2 этихъ конусовъ такъ, чтобы длины производящихъ обоихъ конусовъ были равны между собою, т. е. чтобы

$$a_1m'_1 = a'_1n'_1.$$

Основанія этихъ конусовъ спроектируются на V_1 въ видѣ линій, перпендикулярныхъ соотвѣтственно къ a'_1o_2 и $a'_1o'_1$.

Линія пересѣченія этихъ оснований спроектируется на V_1 въ видѣ точки. Обозначимъ точки пересѣченія этой линіи съ поверхностями конусовъ черезъ X и Y. Проекціи этихъ точекъ на V_1 будутъ точки $x'_1 y'_1$.

Найдемъ проекціи ихъ на H. Перейдемъ отъ системы $\frac{V_1}{H_1}$ къ системѣ $\frac{V_1}{P}$ и найдемъ проекціи круга основанія конуса съ осью AO_1 на P. Проводя изъ точки x'_1 перпендикуляръ $x'_1 x_2$ къ P_{x_1}, найдемъ точки x_2 и y_2 пересѣченія его съ новой проекціей круга. Эти точки опредѣлять намъ разстояніе искомыхъ горизонтальныхъ проекцій точекъ X и Y до оси O_2X_2. Опускаемъ теперь изъ точки $x'_1y'_1$ перпендикуляръ на O_2X_2 и откладываемъ внизъ отъ оси O_2X_2 полученныя разстоянія q и t. Находимъ точки x_1 и y_1. Линіи AX $(a_1x_1, a'_1x'_1)$ и AY $(a_1y_1, a'_1y'_1)$ и будутъ искомыми. Теперь остается только перейти отъ системы плоскостей проекціи $\frac{V_1}{H_1}$ къ заданной системѣ $\frac{V}{H}$.

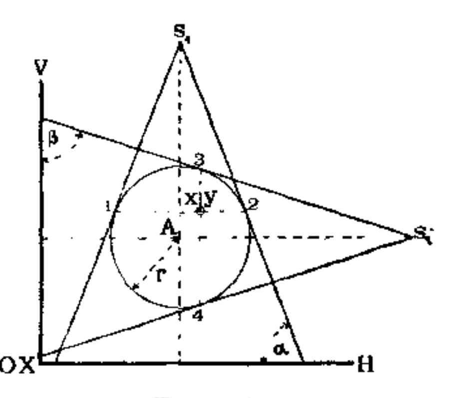
Задача № 35.

Провести плоскость на данномъ разстояніи r отъ данной точки A, подъ угломъ α къ H и подъ угломъ β къ V.

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ.

Всякая плоскость, касательная къ шару радіуса r съ центромъ въ точкѣ A, будетъ удовлетворять первому условію.

Проведемъ черезъ центръ шара профильную плоскоскость и примемъ ее за плоскость чертежа (черт. 447). Опустимъ изъ центра шара перпендикуляръ S_1A на плоскость H и примемъ его за ось конуса, производящія котораго были бы наклонены къ H подъ угломъ α и который касался бы шара.



Черт. 447.

Подобнымъ же образомъ опишемъ конусъ вокругъ шара, но съ осью перпендикулярной къ V и съ производящими, наклоненными къ V подъ угломъ β. Всякая плоскость, касательная къ первому конусу, будетъ удовлетворять двумъ условіямъ.

1) она будетъ удалена отъ точки A на разстояніе r,

2) она будетъ наклонена къ H подъ угломъ α.

Всякая плоскость, касательная ко второму конусу, будетъ удовлетворять также двумъ условіямъ

1) она будетъ удалена отъ точки A на разстояніе r,

2) она будетъ наклонена къ V подъ угломъ β.

Очевидно, плоскость, одновременно касающаяся двухъ конусовъ, будетъ удовлетворять всѣмъ заданнымъ условіямъ.

Опредѣлимъ эту плоскость.

Она должна заключать въ себѣ вершины обоихъ конусовъ, т. е. проходить черезъ линію S_1S_2. Слѣдъ плоскости на H долженъ проходить черезъ горизонтальный слѣдъ линіи S_1S_2; а такъ какъ эта плоскость должна касаться конуса, стоящаго на H, то горизонтальный слѣдъ искомой плоскости долженъ касаться горизонтальнаго слѣда этого конуса. Двѣ линіи S_1S_2 и найденный горизонтальный слѣдъ плоскости вполнѣ опредѣляютъ искомую плоскость.

Эту плоскость можно было бы опредѣлить еще и слѣдующимъ образомъ:

Найдемъ круги 1, 2 и 3, 4 касанія обоихъ конусовъ съ шаромъ и опредѣлимъ

точки X и Y пересѣченія этихъ круговъ. Каждая изъ этихъ точекъ съ линіей S_1S_2 опредѣлитъ по плоскости, удовлетворяющей заданнымъ условіямъ.

Задача № 36.

Провести черезъ данную точку A прямую линію на данномъ разстояніи r отъ данной прямой линіи MN и подъ даннымъ угломъ къ другой прямой PQ.

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ (черт. 448).

Описываемъ вокругъ линіи MN цилиндръ радіуса r. Черезъ точку A проводимъ плоскость, касательную къ этому цилиндру. Всякая линія, проходящая черезъ точку A въ этой плоскости удовлетворяетъ двумъ условіямъ:

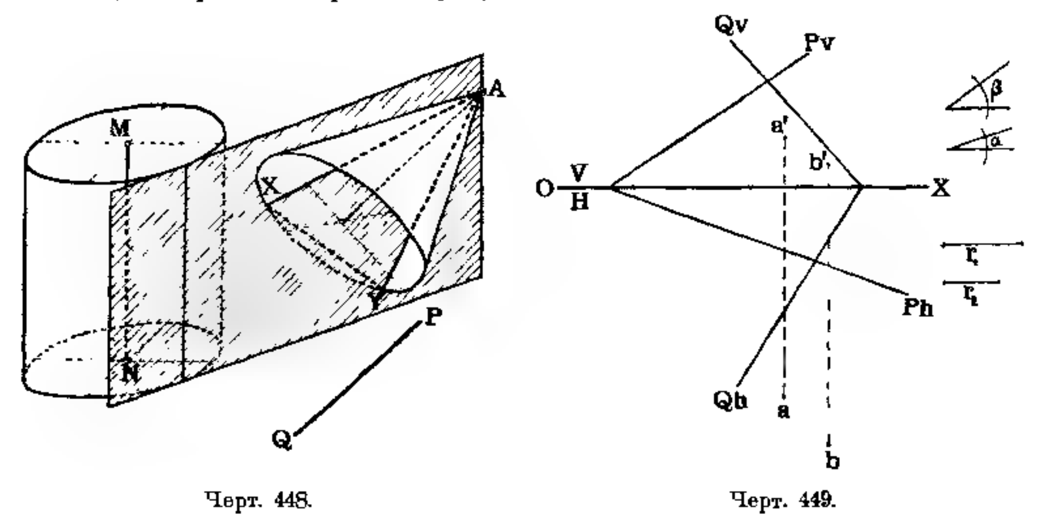
1) она проходитъ черезъ точку A,

2) она проходитъ на данномъ разстояніи отъ линіи MN.

Проводимъ теперь черезъ точку A линію, параллельную линіи PQ и описываемъ вокругъ нея, какъ вокругъ оси, конусъ съ вершиною въ точкѣ A и съ угломъ между производящими и осью равнымъ α.

Находимъ линіи сѣченія AX и AY этого конуса съ ранѣе проведенною плоскостью. Эти линіи, очевидно, будутъ удовлетворять всѣмъ заданнымъ условіямъ, т. е.:

1) онѣ проходитъ черезъ точку A;



Черт. 448. Черт. 449.

2) онѣ проходятъ на данномъ разстояніи r отъ линіи MN, такъ какъ лежатъ въ плоскости, касательной къ цилиндру съ осью MN;

3) онѣ наклонены подъ даннымъ угломъ α къ оси конуса, а слѣдовательно, и къ линіи PQ, такъ какъ лежатъ на поверхности конуса, всѣ производящія котораго наклонены къ линіи PQ подъ угломъ α.

Задача № 37. Провести черезъ точку A плоскость подъ угломъ α къ H и подъ угломъ β къ V.

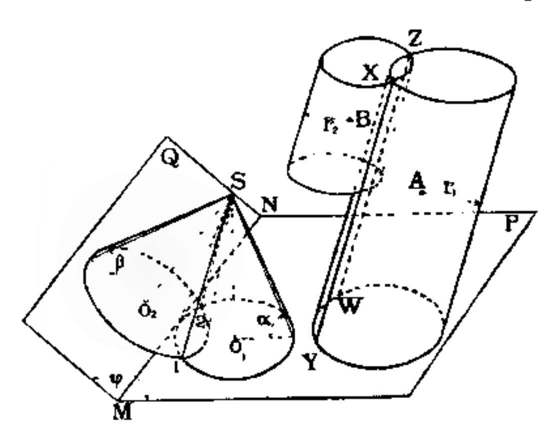
Задача рѣшается подобно задачѣ № 35. Сначала проводимъ плоскость на какомъ нибудь произвольномъ разстояніи a отъ точки A, а потомъ проводимъ черезъ точку A плоскость ей параллельную.

Прослѣдимъ, болѣе подробно, рѣшеніе еще одной задачи.

Задача № 38. Даны: двѣ плоскости P и Q, двѣ точки A и B, два угла α и β и два отрѣзка r_1 и r_2 (черт. 449). Требуется: провести линію подъ угломъ α къ плоскости P, подъ угломъ β къ плоскости Q, на разстояніи r_1 отъ точки A и на разстояніи r отъ точки B

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ. Искомая линія, которую обозначимъ черезъ XY,

должна, согласно заданію, одновременно удовлетворять четыремъ условіямъ. Разсмотримъ тѣ геометрическія мѣста, которымъ должна принадлежать искомая линія. Зададимся въ пространствѣ случайной точкой S (черт. 450) и примемъ послѣднюю за вершину двухъ конусовъ, изъ которыхъ одинъ SO_1 стоялъ бы на P и имѣлъ бы производящія наклонныя къ P подъ угломъ α, а другой SO_2 стоялъ бы на Q и имѣлъ бы производящія наклонныя къ Q подъ угломъ β. Очевидно, что совокупность производящихъ конуса SO_1 представляютъ изъ себя геометрическое мѣсто прямыхъ линіи, наклоненныхъ къ O подъ угломъ α, а совокупность производящихъ конуса SP_2 представляютъ изъ себя геометрическое мѣсто прямыхъ, наклоненныхъ къ Q подъ угломъ β. Линіи $S1$ и $S2$ сѣченія обоихъ геометрическихъ мѣстъ будутъ одновременно удовлетворять двумъ заданнымъ условіямъ, т. е. будутъ наклонены подъ угломъ α къ P и подъ угломъ β къ Q. Опишемъ теперь вокругъ точекъ A и B два цилиндра, оси которыхъ были бы параллельны, напримѣръ, одной изъ



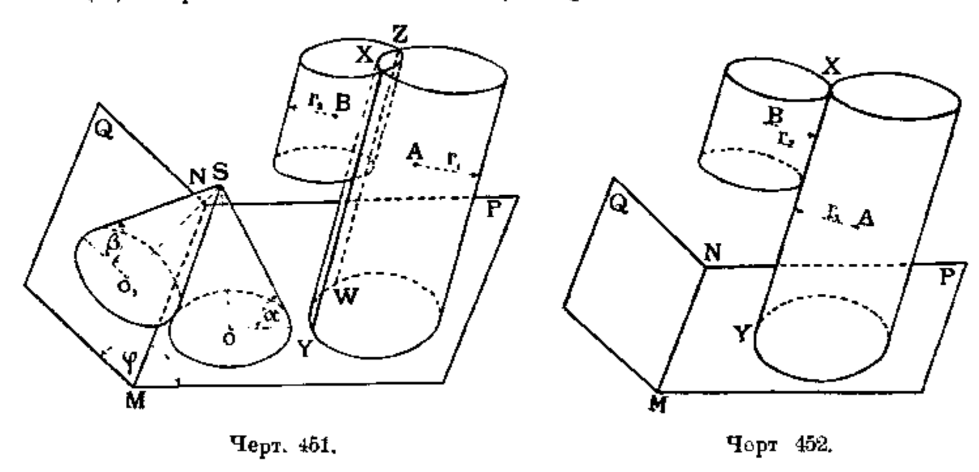
Черт. 450.

найденныхъ линій $S1$, и проходили бы черезъ точки A и B. Радіусъ цилиндра A пусть будетъ равенъ отрѣзку r_1, а радіусъ цилиндра B отрѣзку r_2. Очевидно, что линіи сѣченія цилиндровъ будутъ удовлетворять всѣмъ четыремъ заданнымъ условіямъ.

Число рѣшеній задачи зависитъ отъ величины заданныхъ элементовъ α, β, r_1 и r_2 отъ расположенія точекъ A и B и отъ величины угла φ между плоскостями P и Q. Въ общемъ случаѣ будетъ 4 рѣшенія. Два изъ нихъ показаны на черт 450 (линіи XY и ZW). Проведя цилиндры A и B съ осями параллельными линіи $S2$ сѣченія конусовъ, мы получили бы еще два рѣшенія, если эти цилиндры пересѣкутся, одно рѣшеніе, если эти цилиндры каснутся, и ни одного, если цилиндры не пересѣкутся и не каснутся. Если конуса не пересѣкаются, а лишь касаются другъ друга (черт. 451), то возможны два рѣшенія (линіи XY и ZW) лишь тогда, когда цилиндры пересѣкаются. Если же цилидры касаются (черт. 452), то рѣшеніе будетъ одно и, наконецъ, если цилиндры не будутъ ни пересѣкаться, ни касаться, то не будетъ ни одного рѣшенія (черт. 453). Равнымъ образомъ не будетъ ни одного рѣшенія, если конусы не будутъ ни пересѣкаться, ни касаться (черт. 454). Такимъ образомъ, въ зависимости отъ величины и отъ взаимнаго расположенія заданныхъ элементовъ возможны одновременно: или 4 рѣшенія, или 3, или 2, или 1, или ни одного.

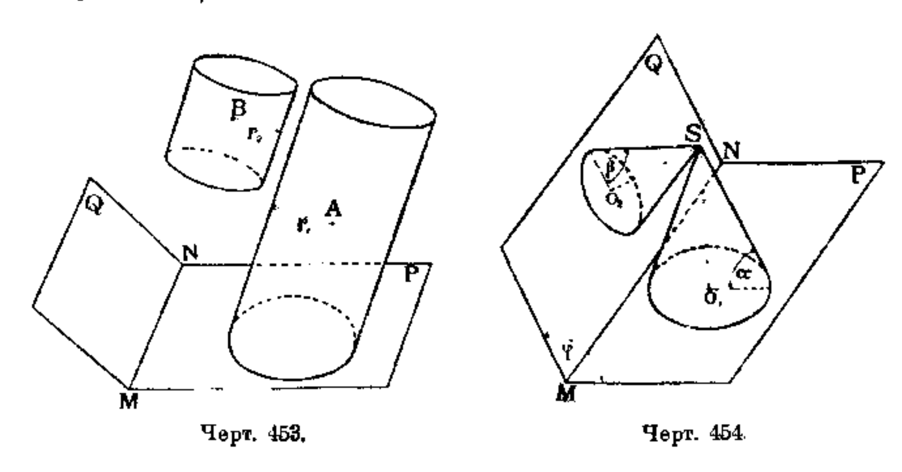
Рѣшеніе задачи въ проекціяхъ. Разсмотримъ, какъ рѣшить задачу въ проекціяхъ. Примемъ общій случай рѣшенія, соотвѣтствующій чертежу 450-му, и построимъ одну изъ искомыхъ линій, напримѣръ, XY.

Планъ рѣшенія задачи будетъ слѣдующій: 1) построеніе двухъ конусовъ, удовлетворяющихъ упомянутымъ условіямъ, 2) нахожденіе линіи сѣченія этихъ конусовъ, 3) построеніе двухъ цилиндровъ съ осями, проходящими соотвѣтственно черезъ точки A и B и параллельными одной изъ найденныхъ линій сѣченія конусовъ, 4) построеніе линіи сѣченія этихъ цилиндровъ.



Черт. 451. Черт. 452.

Для того, чтобы построить линію сѣченія двухъ конусовъ выгодно перемѣнить плоскости проекціи такъ, чтобы линія сѣченія плоскостей P и Q, а слѣдовательно и сами плоскости P и Q, были перпендикулярны къ новой плоскости проекцій. Тогда на эту новую плоскость проекцій оба конуса спроектируются въ видѣ треугольниковъ съ общей вершиной, а углы при основаніяхъ ихъ будутъ соотвѣтственно равны α и β.



Черт. 453. Черт. 454.

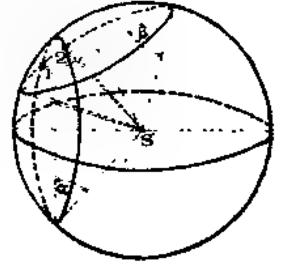
Переходимъ къ чертежу 455. На немъ даны (справа вверху) плоскости P и Q слѣдами Pv, Ph и Qv, Qh и проекціи a', a и b', b точекъ A и B. Находимъ проекціи $m'n'$, mn линіи MN сѣченія плоскостей P и Q и мѣняемъ плоскости проекцій до тѣхъ поръ, пока линія MN не сдѣлается перпендикулярной новой плоскости проекцій. Для этого сначала вмѣсто V выбираемъ плоскость B, перпендикулярную H и параллельную MN ($O_1X_1 \parallel mn$); въ системѣ $\frac{B}{H}$ имѣемъ плоскости P и Q заданными

слѣдами Pr, Ph и Qr, Qh точки A и B заданныя проекціями a_1, a и b_1, b и прямую MN—въ проекціяхъ $m_1'n_1'$ и mn. Мѣняемъ снова плоскости проекцій, замѣняя H черезъ T, причемъ T выбираемъ перпендикулярной MN ($O_2X_2 \perp m_1n_1$). Въ системѣ $\frac{T}{R}$ плоскости P и Q опредѣляются слѣдами Pr, Pt и Qr, Qt, точки A и B проекціями a_1', a_1 и b_1, b_1 и прямая MN—проекціями $m_1'n_1$, m_1n_1.

Задаемся въ системѣ $\frac{T}{R}$ случайной точкой S (s_1, s_1) и принимаемъ ее за общую

Черт. 455.

вершину двухъ конусовъ. Ось одного изъ нихъ будетъ перпендикулярна къ плоскости P и спроектируется на T въ линію, перпендикулярную къ Pt_1, а самый конусъ спроектируется на T въ видѣ равнобедреннаго треугольника съ угломъ при основаніи равнымъ α. Другой конусъ спроектируется на T также въ видѣ треугольника, высота котораго будетъ перпендикулярна Qt, а углы при основаніи будутъ равны β. Что же касается длинъ равныхъ сторонъ второго треугольника, то выбираемъ ихъ равными длинѣ равныхъ сторонъ перваго треугольника на основаніи слѣдующихъ соображеній. Представимъ себѣ въ пространствѣ шаръ (черт. 456) съ центромъ въ точкѣ S. Примемъ эту точку за вершину двухъ конусовъ съ углами α и β при основаніи. Для нахожденія линій сѣченія этихъ конусовъ достаточно замѣтить точки 1 и 2 пересѣченія между собою слѣдовъ (круговъ) обоихъ конусовъ на поверхности шара и соединить эти точки съ вершиною S. Но круги



Черт. 456.

основанія конусовъ пересѣкутся при условіи, что они лежать на поверхности шара, т. е. длины производящихъ обоихъ конусовъ будутъ равны, чѣмъ и объясняется поставленное ранѣе условіе равенства сторонъ въ обоихъ треугольникахъ (черт. 455, служащими проекціями конусовъ на плоскости T Проекціями на плоскости T точекъ **1** и **2** сѣченія круговъ основанія конусовъ будетъ точка 1_1, 2_1. Чтобы найти разстоянія точекъ **1** и **2** отъ плоскости T перейдемъ къ новой системѣ плоскостей проекцій $\frac{S}{T}$, замѣнивъ R черезъ плоскость S, параллельную основанію конуса съ угломъ α. Проекція вершины конуса на плоскости S будетъ точка S_1'', основаніе конуса (α) на плоскости S спроектируется въ видѣ круга, на которомъ находятся проекціи $1_1''$ и $2_1''$ точекъ **1** и **2** Теперь нетрудно построить проекціи 1_1 и $2_1'$ тѣхъ же точекъ и на плоскости B. Такимъ образомъ мы рѣшили двѣ изъ поставленныхъ нами четырехъ частныхъ задачъ и нашли двѣ линіи S**1** и S**2** въ проекціяхъ на плоскости T и R, гдѣ эти линіи обозначены $s_1 1_1'$, $s_1 1_1$ и $s_1 2_1'$, $s_1 2_1$. Выберемъ изъ нихъ одну S**1** и будемъ проводить искомую линію параллельно линіи S**1**.

Переходимъ теперь къ рѣшенію третьей и четвертой частныхъ задачъ, т. е построимъ два цилиндра, оси которыхъ были бы параллельны линіи S**1** и проходили бы—одного черезъ точку A, а другого—черезъ точку B, и радіусы этихъ цилиндровъ были бы соотвѣтственно равны даннымъ отрѣзкамъ r_1 и r_2, и затѣмъ найдемъ линіи сѣченія этихъ цилиндровъ.

Сѣченіе цилиндровъ съ параллельными осями легко находить, если оси ихъ перпендикулярны къ плоскости проекцій. Поэтому поворачиваемъ линію S**1**, параллельно которой должны быть направлены оси цилиндровъ, а вмѣстѣ съ ней и точки A и B въ системѣ $\frac{T}{R}$ до тѣхъ поръ, пока линія S**1** не будетъ перпендикулярна къ B. Для этого первое вращеніе производимъ вокругъ линіи I_1I_1 ($i_1'i'_1$, i_1i_1), проходящей черезъ точку S и перпендикулярную къ R. Вращаемъ линію S**1** до тѣхъ поръ, пока она не будетъ параллельна плоскости T. Тогда $S_1'1_2'$ должна быть параллельна O_2X_2.

Уголъ поворота $-\gamma$. Проекціи поворачиваемыхъ элементовъ послѣ перваго поворота будутъ: линія S**1** ($s_1'1_2$, $s_1 1_2$), точекъ A и B . . a_2', a_2 и b_2', b_2.

Второй поворотъ производимъ вокругъ оси I_2I_2 ($i_2'i_2'$, i_2i_2), проходящей черезъ точку S и перпендикулярной къ плоскости T. Вращеніе производимъ до тѣхъ поръ, пока линія S**1** не будетъ перпендикулярна къ плоскости R; уголъ поворота—δ. Новое, окончательное положеніе линіи S**1** и точекъ A и B послѣ второго поворота будетъ: $s_1'1_3$, $s_1 1_3$, a_3', a_3, b_3', b_3. Такъ какъ теперь линія S**1**, параллельно которой должны располагаться оси цилиндровъ, перпендикулярна къ R, то на эту плоскость оба цилиндра спроектируются въ видѣ круговъ: одного съ центромъ a'_3 радіуса r_1 и другого съ центромъ b_3', радіуса r_2.

На T оба цилиндра спроектируются въ видѣ прямоугольниковъ. Горизонтальная проекція искомой линіи сѣченія двухъ цилиндровъ опредѣлится точкой x_3y_3 пересѣченія круговъ (другое рѣшеніе - точка z_3w_3), а вертикальная проекція - будетъ линія x_3y_3 перпендикулярная O_2X_2 (одно рѣшеніе).

Такимъ образомъ искомая линія найдена. Остается ее привести въ заданную систему $\frac{T}{H}$. Для этого достаточно сдѣлать два обратныхъ вращенія вокругъ осей I_1I_1 и I_2I_2 на соотвѣтственно на углы γ и δ, и двѣ перемѣны плоскостей проекцій. При этихъ построеніяхъ линія XY въ проекціяхъ обозначена слѣдующимъ образомъ:

I. Система $\frac{T}{R}$ . . . а) Линія x_3y_3, $x_3'y_3'$.

б) послѣ обратнаго поворота вокругъ оси I_2I_2 на уголъ δ— x_2y_2, $x_2'y_2$,

c) послѣ обратнаго поворота вокругъ оси I_1I_1 на уголъ γ— x_1y_1, $x_1'y_1$.

2. Система $\frac{R}{H}$ . . xy, $x_1'y_1'$

3. Система $\frac{V}{H}$ . . xy, $x'y'$ (искомое рѣшеніе).

---

§ 24. Построеніе трегранныхъ угловъ.

Каждый трегранный уголъ S заключаетъ въ себѣ 6 элементовъ.

1. три плоскихъ угла a, b и c;

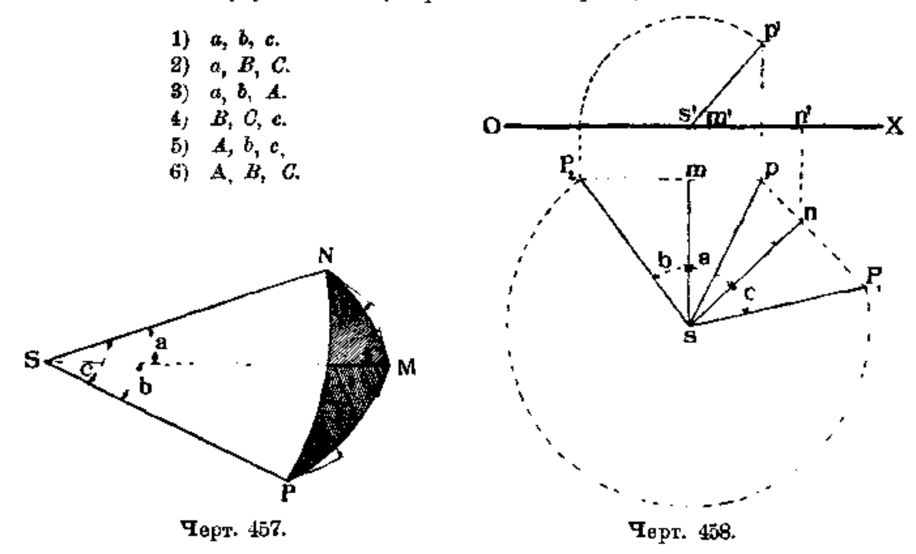
2. три двугранныхъ A, B, C (черт. 457).

Условимся обозначать плоскіе углы, противолежащіе двуграннымъ, малыми буквами алфавита того же наименованія.

Каждые три элемента вполнѣ опредѣляютъ трегранный уголъ. Поэтому возможно столько комбинацій заданій трегравнаго угла, сколько можно составить сочетаній изъ 6 элементовъ по три.

Сочетанія эти будутъ таковы (отбрасывая повторенія).

1) a, b, c.
2) a, B, C.
3) a, b, A.
4) B, C, c.
5) A, b, c,
6) A, B, C.



Черт. 457. Черт. 458.

Разсмотримъ рѣшеніе задачъ на построеніе трегранныхъ угловъ.

Задача № 39.

Даны три плоскихъ угла a, b, c. (сочетаніе 1-е). Построить трегранный уголъ (черт. 458).

Рѣшеніе.

Предположимъ, что трегранный уголъ $MNPS$ разрѣзанъ по одному ребру, напримѣръ, по SP, и грани его совмѣщены одна съ другою и съ плоскостью H.

Тогда углы a, b, и c будутъ изображены на плоскости H безъ искаженія. Расположимъ ребро SM перпендикулярно къ V. Далѣе отмѣтимъ на ребрѣ SP въ двухъ его положеніяхъ SP_1 и SP_2 одну и ту же точку P и будемъ поворачивать грани SNP и SMP соотвѣтственно вокругъ реберъ SN и SM до тѣхъ поръ, пока обѣ точки P_1 и P_2 не совпадутъ. Такъ какъ движеніе точекъ P_1 и P_2 будетъ совершаться въ плоскостяхъ, соотвѣтственно перпендикулярныхъ къ SM и SN, то гори-

зонтальныя проекціи этихъ точекъ будутъ двигаться по линіямъ P_1p и Pp_2, соотвѣтственно перпендикулярнымъ къ sm и sn. Точка p—пересѣченія линій P_2p и P_2p и будетъ горизонтальной проекціей искомой точки.

Вертикальная ея проекція должна лежать на перпендикулярѣ къ OX, опущенномъ изъ точки p. Такъ какъ ребро SM выбрано перпендикулярнымъ къ OX, то разстояніе точки p до этого ребра будетъ практиковаться на V безъ искаженія; поэтому засѣкаемъ перпендикуляръ pp' изъ точки m, какъ изъ центра, дугою радіуса равнаго длинѣ mP_2 перпендикуляра, опущеннаго изъ точки P_2 на ребро sm.

Точка p' и будетъ искомой вертикальной проекціи точки P.

Задача № 40. Даны два двугранныхъ угла B и C и плоскій уголъ a между ними (сочетаніе 2-ое). Построить трігранный уголъ.

Рѣшеніе.

Предположимъ, что грань SMN, заключающая въ себѣ плоскій уголъ a, совмѣщена съ плоскостью H такъ, что ребро SM стало перпендикулярнымъ къ V. Если обозначить двугранный уголъ при ребрѣ SM черезъ B, то этотъ уголъ на V спроектируется безъ искаженія.

Поэтому проводимъ линію $m'p'$, слѣдъ на V грани SMP, подъ угломъ B къ OX. Переходимъ теперь отъ системы плоскостей проекцій $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V_1}{H}$ съ новой осью O_1X_1, причемъ V_1' выбираемъ перпендикулярной къ ребру SN. Строимъ въ этой системѣ слѣдъ $p_1'n_1$ грани SPN на V_1' такъ же, какъ и раньше это дѣлали для грани SPM въ системѣ $\frac{V}{H}$. Линія $p_1'n_1'$ пойдетъ подъ угломъ C къ $O X_1$

Теперь остается въ системѣ $\frac{V}{H}$ найти линію сѣченія граней SPM и SPN. Для этого пересѣкаемъ обѣ грани горизонтальною плоскостью, отстоящею отъ H на какомъ нибудь разстояніи h, и находимъ линія сѣченія этой плоскости съ плоскостями граней. Точка P пересѣченія этихъ линій и будетъ опредѣлять положеніе ребра SP. Вертикальная же проекція p' той точки будетъ лежать на линіи $m\,p'$.

Задача № 41.

Даны два плоскихъ угла a и b и одинъ двугранный A, противолежащій плоскому углу a (сочетаніе 3-е). Построимъ трігранный уголъ (черт. 460).

Рѣшеніе.

Строимъ грань SMN, заключающую уголъ b, на плоскости H такъ, чтобы ребро SM было перпендикулярно къ OX.

Тогда уголъ A при ребрѣ SM будетъ на V проектироваться безъ искаженія и слѣдъ грани SMP на V пойдетъ по линіи $s'p$ подъ угломъ A къ OX. Искомое ребро SP опредѣлится, очевидно, какъ линія сѣченія грани SMP съ поверхностью конуса, вершина котораго находится въ точкѣ S, осью служитъ ребро SN, а производящія наклонены къ этой оси подъ угломъ a

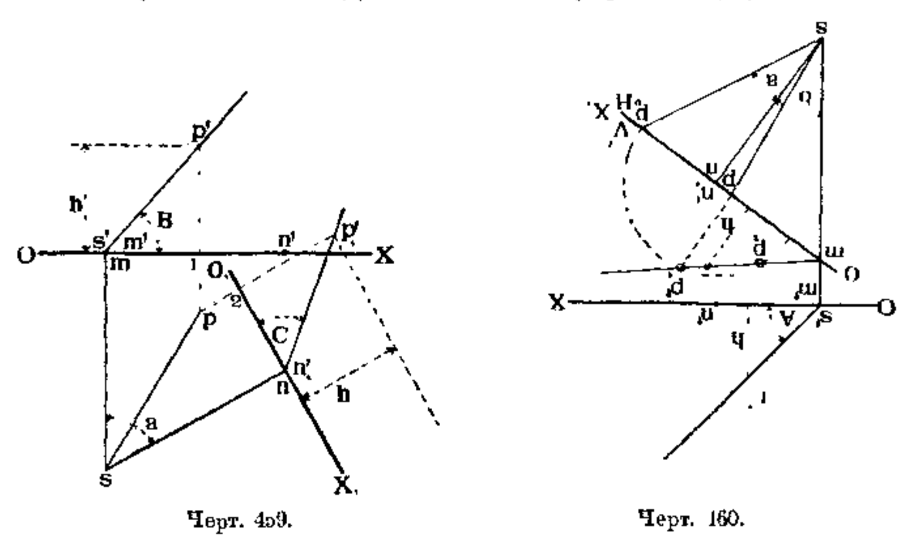
Для построенія этой линіи переходимъ отъ системы плоскостей проекцій $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V'}{H}$, причемъ V' выбираемъ перпендикулярной къ SN. Строимъ въ системѣ $\frac{V'}{H}$ слѣдъ mp_1 грани SMP на V', и слѣдъ конуса и находимъ точки p' и p_2 пересѣченія этихъ слѣдовъ. Задача, очевидно, допускаетъ въ общемъ случаѣ два рѣшенія Найдя, напримѣръ, точку P въ системѣ $\frac{V}{H}$ и соединивъ ее точкою S, мы такимъ образомъ опредѣлимъ искомое ребро SP.

Задача № 42.

Даны два двугранныхъ угла B и C и одинъ плоскій c, противолежащій одному изъ данныхъ двугранныхъ угловъ (сочетаніе 4-ое). Требуется построить трігранный уголъ (черт 461).

Рѣшеніе.

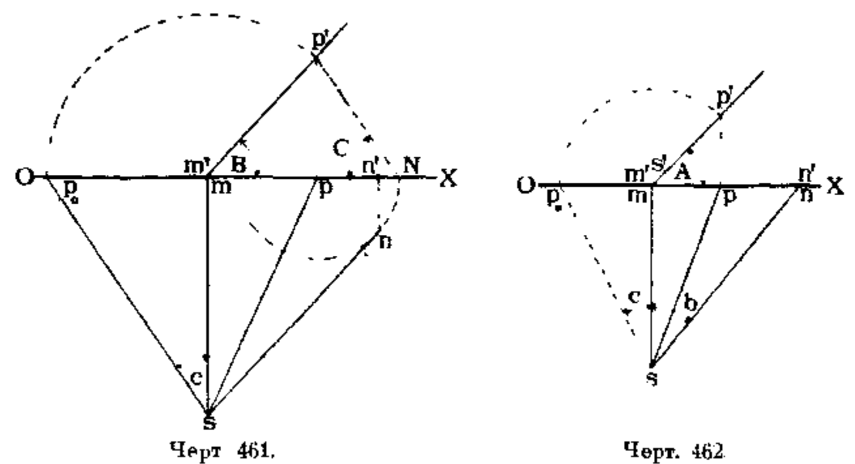
Проводимъ въ плоскости H ребро SM перпендикулярно къ оси OX. Пусть черезъ это ребро проходитъ грань SMP, составляющая уголъ B съ плоскостью грани SMN, причемъ послѣднюю предполагаемъ совмѣщенной съ H. Уголъ B будетъ проектироваться на V безъ искаженія. Проводимъ слѣдъ $m'p$ грани SMP на V подъ угломъ B къ OX. Далѣе совмѣщаемъ эту грань съ H, вращая ее около



Черт. 459.

Черт. 460.

ребра SM. Послѣ совмѣщенія уголъ c будетъ проектироваться на N безъ искаженія. Проводимъ изъ случайной точки p_0, выбранной на оси OX, линію p_0S подъ угломъ c къ ms. Точку S пересѣченія линіи p_0S и mS принимаемъ за вершину триграннаго угла.



Черт. 461.

Черт. 462.

Возвращаемъ теперь грань SMP въ прежнее положеніе. Пусть повернутое обратно положеніе точки p_0 будетъ p'. Теперь задача сводится къ слѣдующей: черезъ данную прямую SP провести плоскости подъ угломъ C къ H.

Для рѣшенія этой задачи поступаемъ слѣдующимъ образомъ: принимаемъ точку P_0 за вершину конуса, производящія котораго наклонены къ H подъ угломъ

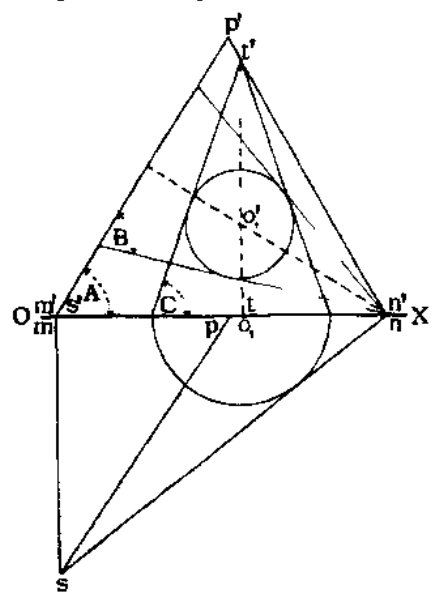
C. Находимъ горизонтальный слѣдъ *Nn* этого конуса и изъ точки *s* проводимъ линію *sn*, касательную къ этому слѣду. Линія *sn*, будучи слѣдомъ на *H* плоскости, касательной къ конусу, и будетъ искомымъ ребромъ *SN* триграннаго угла.

Задача № 43

Даны два плоскихъ угла *b* и *c* и одинъ двугранный *A*, заключенный между ними (сочетаніе 5-е) Требуется построить трегранный уголъ (черт. 462).

Рѣшеніе.

Предполагаемъ грань *SMN* заключающую уголъ *b*, совмѣщенной съ *H* такъ, что ребро *SM* перпендикулярно *OX* Строимъ въ совмѣщеніи съ *H* другую грань *SMP*, заключающую уголъ *c*. Поворачиваемъ далѣе эту грань вокругъ ребра *SM* до тѣхъ поръ, пока она не будетъ наклонена къ *H* (а слѣдовательно и къ грани *SMN*) подъ угломъ *A*. Тогда точка *P* — слѣдъ ребра *SP* на *V* и опредѣлитъ совмѣстно съ точкою *S* положеніе искомаго ребра *SP*.



Черт. 463.

Задача № 44.

Даны три двугранныхъ угла *A*, *B* и *C* (сочетаніе 6-е). Построить трегранный уголъ (черт. 463).

Рѣшеніе въ пространствѣ.

Проводимъ плоскость грани *SMP* перпендикулярно къ *V* подъ угломъ *A* къ *H*. Далѣе выбираемъ на оси *OX* какую нибудь точку *N* и проводимъ въ пространствѣ черезъ нее плоскость *SPN* подъ угломъ *B* къ грани *SMP* и подъ угломъ *C* къ грани *SMN*.

Рѣшеніе въ проекціяхъ этой задачи подобно рѣшенію задачи № 35.

Проведемъ черезъ точку *N* въ плоскости *V* линію, перпендикулярную къ *m'p'*, примемъ ее за ось конуса съ вершиною въ точкѣ *N*. Проведемъ производящія этого конуса подъ угломъ *B* къ *m'p'*. Далѣе впишемъ въ этотъ конусъ шаръ съ центромъ въ точкѣ O_1, лежащей на оси конуса. Опишемъ вокругъ этого шара новый конусъ, ось котораго была бы ⊥ *H*, а производящія были бы наклонены къ *H* подъ угломъ *C*. Тогда вершина этого конуса расположится въ точкѣ *T*.

Проводимъ изъ *N* линію *NS* касательную къ горизонтальному слѣду этого конуса до пересѣченія съ *ms* въ точкѣ *S*. Линія *SN* и будетъ ребромъ угла *C*. Соединяемъ далѣе точки *T* и *N*. Линія *NT* пересѣчетъ слѣдъ *m'p'* грани *SMP* въ точкѣ *P*, которая вмѣстѣ съ точкой *S* опредѣлитъ третье ребро триграннаго угла.

25. Построеніе кинематическихъ пространственныхъ кривыхъ линій.

Въ различныхъ отдѣлахъ прикладной механики (зубчатыя зацѣпленія, шарнирные механизмы и т. д.), часто приходится имѣть дѣло съ пространственными кривыми линіями, образованными кинематическимъ путемъ, какъ траекторіи точки, движеніе которой въ пространствѣ подчинено опредѣленному закону.

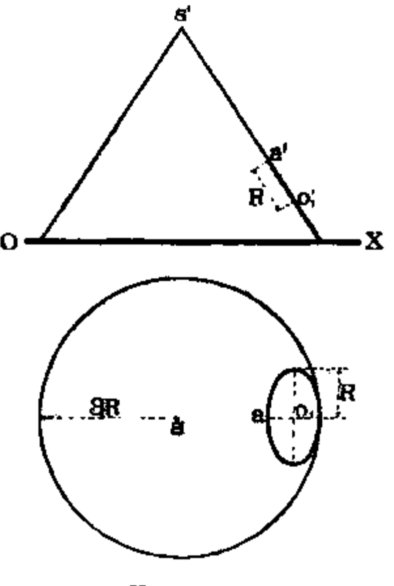
Способовъ образованія и видовъ пространственныхъ кривыхъ линій можно придумать безчисленное множество.

Однако, разъ заданъ опредѣленный законъ образованія такой линіи, всегда можно построить проекціи ея, а имѣя послѣднія, можно, въ случаѣ надобности, построить изъ проволоки и модели линіи [1])

Въ большинствѣ случаевъ проекціи такихъ линій можно построить, примѣняя методы вращенія или перемѣны плоскостей проекцій, дабы по возможности избѣжать построенія эллипсовъ и случайныхъ кривыхъ линій, а пользоваться для нахожденія точекъ искомой линіи кругами и прямыми линіями.

Разсмотримъ подробно рѣшеніе одной изъ такихъ задачъ.

Задача № 45. Построить траекторію точки A, движеніе которой опредѣляется слѣдующимъ образомъ (черт 464 точка A лежитъ на окружности круга, катящагося по кругу основанія прямого кругового конуса; радіусъ катящагося круга R; радіусъ круга основанія конуса $= 3R$; плоскость малаго круга все время остается касательной къ поверхности конуса.



Черт 464.

Рѣшеніе

а) *Опредѣленіе особенныхъ точекъ. Траекторія центра круга.*

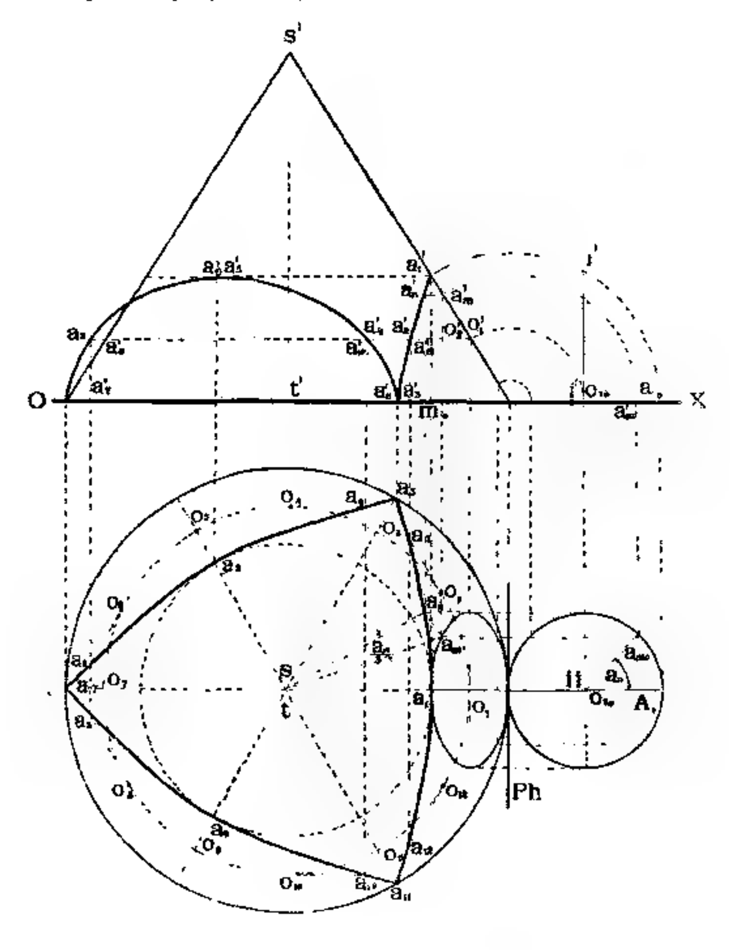
Пусть имѣемъ въ проекціяхъ (черт 466) стоящій на H прямой круговой конусъ. Кромѣ того, задано въ проекціяхъ одно изъ положеній катящагося круга и показана точка A_1 (a_1, a_1'), находящаяся на этомъ кругѣ и занимающая въ данномъ его положеніи наивысшее положеніе, при которомъ она въ то же время и попадаетъ на поверхность конуса, располагаясь на производящей конуса SA_1 (sa_1, $s'a_1'$).

На чертежѣ показано построеніе проекціи малаго круга на V и на H въ видѣ эллипса), произведенное при помощи совмѣщенія плоскости малаго круга H вращеніемъ вокругъ горизонтальнаго Ph плоскости малаго круга.

Такъ какъ радіусъ круга, кас...наго поверхности конуса, въ три раза меньше радіуса круга основанія ко...са, то ...тъ малый кругъ сдѣлаетъ три оборота, пока пройдетъ всю окружность основанія конуса, и потому точка A будетъ три раза находиться въ наивысшемъ и три раза въ наинизшемъ положеніяхъ. Когда точка A, находящаяся въ наивысшемъ положеніи, перейдетъ опять въ наивысшее положеніе, т. е. окружность сдѣлаетъ полный оборотъ, то по окружности основанія конуса будетъ пройдена дуга въ 120°, а когда точка A придетъ въ наинизшее положеніе, то по окружности основанія конуса будетъ пройдена дуга въ 60°. Отсюда мы заключаемъ, что горизонтальныя проекціи точекъ наив...аго и наинизшаго положенія, чередуясь, находятся на горизонтальныхъ проекціяхъ производящихъ конуса, проведенныхъ черезъ 60°, начиная отъ производящей SA. При этомъ горизонтальныя проекціи наивысшихъ точекъ находятся также на окружности, описанной изъ точки s радіусомъ равнымъ sa_1, а горизонтальныя проекціи точекъ наинизшаго положенія располагаются на окружности круга основанія конуса.

[1]) Подобныя модели имѣются въ кабинетѣ теоретической механики Петроградскаго Политехническаго Института и въ кабинетѣ кракти ческой механики Петроградскаго Университета.

Такимъ образомъ, горизонтальныя проекціи наивысшихъ и наинисшихъ точекъ (a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}), опредѣляются какъ пересѣченія окружностей и горизонтальныхъ проекцій производящихъ, дѣлящихъ окружность основанія даннаго конуса на шесть равныхъ частей. Траекторія центра катящагося круга, при перемѣщеніяхъ его, будетъ проектироваться на H въ окружность, описанную изъ точки s радіусомъ, равнымъ so_1; что касается вертикальныхъ проекцій наивысшихъ точекъ, то онѣ опредѣляются какъ пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ горизонтальныхъ проекцій этихъ



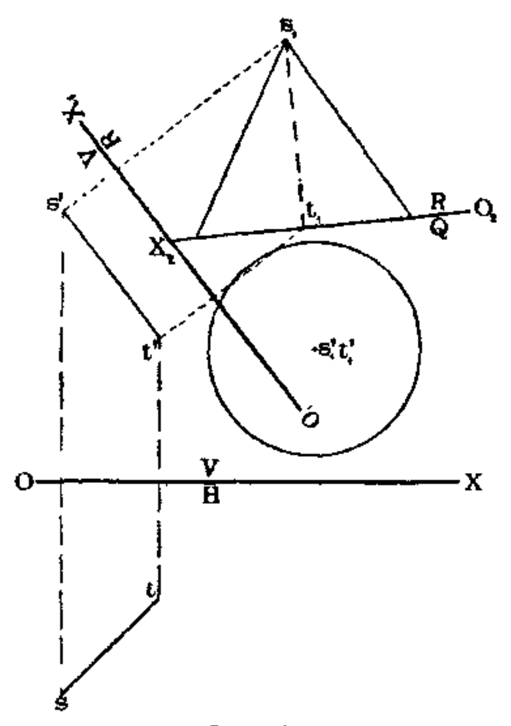
Черт. 465.

точекъ на ось OX и прямой проведенной изъ точки a_1' параллельно оси OX (длина $a_1'm_0$ выражаетъ длину наибольшаго разстоянія точки A до плоскости H). Вертикальныя проекціи наинисшихъ положеній точки A опредѣляются. какъ основанія перпендикуляровъ опущенныхъ изъ горизонтальныхъ проекцій точекъ этихъ положеній на ось OX. При этомъ вертикальныя проекціи a_3', a_{11}', a_5' и a_9' попарно совпадутъ. Вертикальныя проекціи центра катящагося круга располагаются на прямой, проведенной изъ точки o_1 параллельно OX.

Слѣдующими особенными точками искомой траекторіи будутъ точки, зани-

мающія по высотѣ среднее положеніе между наивысшими и наинизшими Таковыя точки будутъ лежать на горизонтальномъ діаметрѣ соотвѣтствующаго положенія катящагося круга.

Разсматривая движеніе точки, начиная съ ея наивысшаго положенія A_1, заключаемъ, что радіусъ SA_1 займетъ горизонтальное положеніе тогда, когда центръ круга O повернется вокругъ оси конуса на уголъ $30°$ Горизонтальная проекція этого радіуса въ его новомъ положеніи будетъ a_2o_2, располагаясь перпендикулярно къ линіи SO_2. Вертикальная проекція этого радіуса совпадетъ съ линіей $o_1'o_2'$, проведенной черезъ точку o_1 параллельно оси OX, и точка a_2' опредѣлится, какъ пересѣченіе линіи o_1o_2' съ линіей a_2a_2 проведенной черезъ o_2 перпендикулярно



Черт. 466.

къ OX. Подобнымъ же образомъ найдемъ положенія точекъ A_6, A_4, A_8, A_{10} и A_{12}.

b) ***Построеніе горизонтальной и вертикальной проекціи случайной точки A_n кривой линіи.***

Построеніе проекціи случайной точки A_n траекторіи, отвѣчающей повороту малаго круга на $a°$ можно произвести, исходя изъ слѣдующихъ соображеній. Точка A_1 можетъ придти въ положеніе A_n двоякимъ путемъ: въ одномъ случаѣ центръ малаго круга вращается вокругъ оси конуса на уголъ $\left(\frac{a_n}{3}\right)^0$ и вмѣстѣ съ тѣмъ малый кругъ поворачивается вокругъ своего центра на уголъ $a_n°$. Въ другомъ случаѣ можно представить, что малый кругъ въ своемъ начальномъ положеніи повернулся на уголъ $a°_n$ и тогда точка A_1 займетъ нѣкоторое положеніе A_m и затѣмъ, чтобы получить окончательное ея положеніе A_n, достаточно повернуть точку A_m вокругъ оси конуса на уголъ $\left(\frac{a_n}{3}\right)^0$.

Такимъ образомъ полное движеніе точки A_1 мы какъ бы раскладываемъ на два: *относительное*, вращая A_1 въ положеніе A_m и *переносное*, вращая A_m въ положеніе A_n.

Воспользуемся для построенія случайныхъ точекъ траекторіи именно этимъ вторымъ способомъ, такъ какъ онъ требуетъ меньше построеній, позволяя ограничиться лишь однимъ совмѣщеніемъ малаго круга съ плоскостью H.

Для рѣшенія этой задачи въ проекціяхъ совмѣщаемъ кругъ съ плоскостью H, вращая плоскость его вокругъ Ph, и поворачиваемъ кругъ на мѣстѣ вокругъ оси Π (s, $s's'$), перпендикулярной къ H на уголъ a_n. Тогда точка A займетъ положеніе A_{m0}. Поднимаемъ кругъ въ его прежнее положеніе и находимъ проекціи (a_m, a'_m) точки A_m. Для полученія проекцій окончательнаго положенія точки A_n достаточно теперь повернуть точку A_m вокругъ оси конуса на уголъ $\left(\frac{a_n}{3}\right)^0$, что и выполнено на чертежѣ.

Построивъ подобнымъ же образомъ рядъ положеній точки A при поворотахъ малаго круга на разные углы и найдя проекціи этихъ точекъ, соединяемъ ихъ въ соотвѣтственныхъ проекціяхъ съ ранѣе полученными особенными точками плавной кривой.

Изъ чертежа видно, что кривая въ пространствѣ дѣлится на три одинаковыхъ вѣтви, горизонтальныя проекціи которыхъ одинаковы.

c) *Случай, когда ось ST конуса не перпендикулярна ни къ H, ни къ V*

Въ этомъ случаѣ мѣняемъ два раза плоскости проекцій, или дѣлаемъ два поворота вокругъ осей, послѣдовательно перпендикулярныхъ къ H и къ V до тѣхъ поръ, пока ось конуса не сдѣлается перпендикулярной къ плоскости проекцій (на чертежѣ 466, S_1T_1 перпендикулярна къ Q, причемъ примѣненъ методъ перемѣны плоскостей проекцій). Въ новой системѣ $\frac{R}{Q}$ слѣдуетъ построить траекторію точки A, какъ было объяснено раньше, а затѣмъ обратной перемѣной плоскостей проекцій (или обратными поворотами), необходимо привести полученную траекторію къ заданному положенію оси конуса ST въ системѣ $\frac{V}{H}$ [1]).

---

[1]) Условія другихъ задачъ для упражненій см. Н. Рыниъ. «Сборникъ задачъ для упражненій и заданій для эпюръ по Начертательной Геометріи». Петроградъ. 1916 г.



УКАЗАТЕЛИ ИМЕНЪ И ПРЕДМЕТОВЪ.

Указатель именъ [1].

---

[1]) Числа показываютъ страницы листа.

Указатель предметовъ[1].

---

[1]) Цифры показываютъ страницы текста.